Sammanfattning Föreläsning 15

Integration i sfäriska koordinater

E *"sfärisk låda"*: $a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d$

$$\iiint_E g(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta g(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi)\ \rho^2 \sin\phi \ \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\rho$$

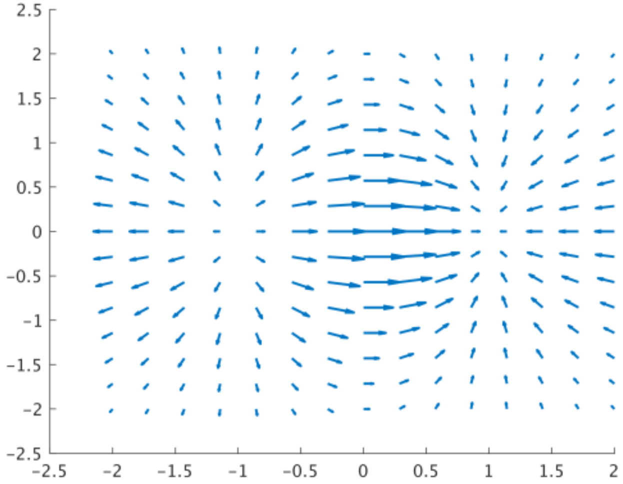
Kortare: $\mathrm{dV} = \rho^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\rho$ och $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$

Vektorfält

Funktioner $\mathbf{F}$ från $D \subseteq \mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

För varje $(x, y) \in D$ får man

en vektor $\mathbf{F}(x, y) \in \mathbb{R}^2$

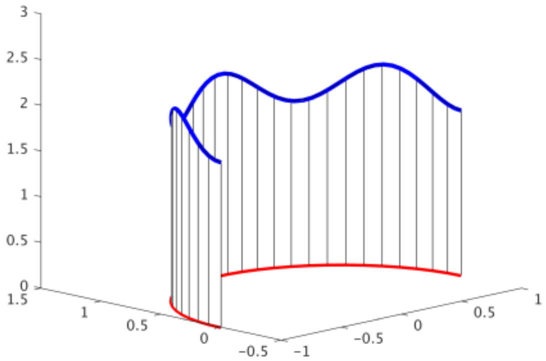


(eller motsvarande i $\mathbb{R}^3$)

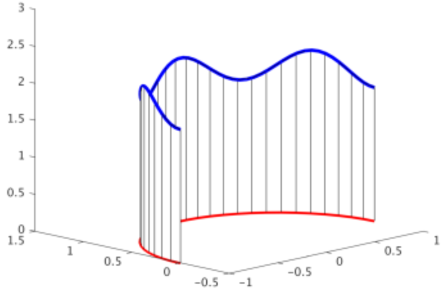
Kurvintegral av funktioner: C kurva, $f(x, y)$ reellvärd funktion

$\int_C f(x, y)ds$ är "*arean av ytan mellan C* (röd)

och grafen $z = f(x, y)$ längs C (blå)"



Formel för kurvintegral: C kurva parametriserad av $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \big(x(t), y(t)\big)$, $a \le t \le b$, $f(x, y)$ kontinuerlig funktion



$$\int_C f\big(x, y\big) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(\mathrm{t}))|\mathbf{r}'(\mathrm{t})|\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

$$(ds = |\mathbf{r}'(\mathrm{t})|\mathrm{d}t)$$