Sammanfattning Föreläsning 16

- Om har tunn tråd längs kurva C med densitet $\rho(x, y)$, så är dess
  - **massa** $m = \int_C \rho(x, y)ds$
  - **masscentrum** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right)$ där

  $M_x = \int_C x\, \rho(x, y)ds$ och $M_y = \int_C y\, \rho(x, y)ds$

- **Kurvintegral av vektorfält $\mathbf{F}$ längs kurva C**
  som ges av $\mathbf{r}(t),\ a \leq t \leq b$.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\mathrm{t})\big) \cdot \mathbf{r}'(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t$$

(Kort: $\mathrm{d}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t$)

Om $\mathbf{F}$ kraftfält ger kurvintegralen *arbetet* som kraftfältet utför på en partikel som rör sig längs C.

- **Huvudsatsen för kurvintegraler:** Om C ges av $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$ så är

$$\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(\mathrm{b})\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big)$$

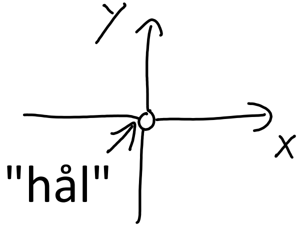
- Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är **konservativt** om $\mathbf{F} = \nabla f$, dvs det är gradienten av en funktion f.

- Om $\mathbf{F} = \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ är konservativt så är $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

- En kurva C är **enkel och sluten** om den börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv

- Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är **enkelt sammanhängande** om den *"inte innehåller några hål".*
  (Mer precist uttryckt m.h.a. enkla slutna kurvor)

  Exempel:
  $\mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande
  $\mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$ ej enkelt sammanhängande



- **Sats** Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ är ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är enkelt sammanhängande och
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
så är $\mathbf{F}$ konservativt på D, dvs $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon funktion f.

(Tidigare, såg att ekvationen *måste* vara uppfylld för att skall vara konservativt, denna satsen säger att det *räcker)*