Sammanfattning Föreläsning 20

Divergens av ett vektorfält

i) $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ i $\mathbb{R}^2$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}}$$

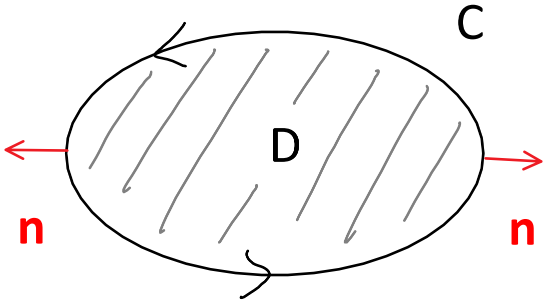
ii) $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{z}}$$

Kortare: div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$, där $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ eller $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$.

Låt C vara en enkel sluten kurva som begränsas av ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{n}$ vara en enhetsnormalvektor till tangentlinjen till C som pekar ut från D. Då är flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ ut genom C:

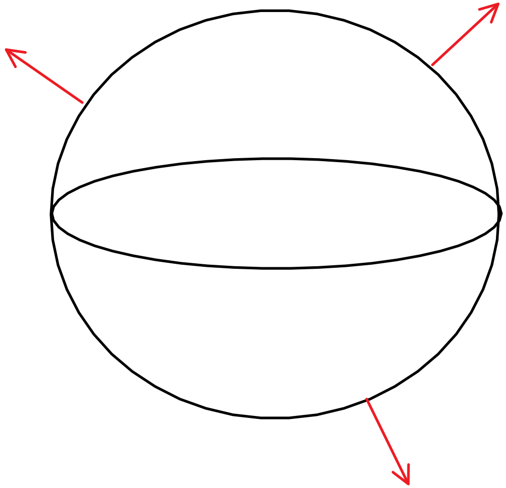
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s$$



<u>Divergenssatsen för kurvor</u>

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, \mathrm{d}A$$

Om S är randen till ett område E så säger man att S är en *sluten yta.* S är *positivt orienterad* om dess orientering pekar ut från E



Divergenssatsen

Låt S vara den positivt orienterade randen till ett område $E \subseteq \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{F}$ ett vektorfält på E.

Då är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V$$

Innebörd av divergens av ett vektorfält

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska och E ett område i $\mathbb{R}^3$ så följer av divergenssatsen att

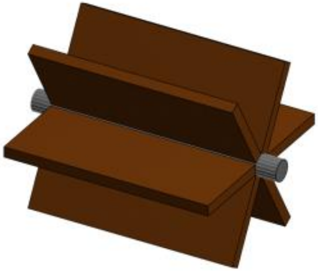
$$\left\{\begin{matrix}\text{det som produceras} \\ \text{eller konsumeras i } E\end{matrix}\right\} = \{\text{flödet ut ur } E\} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V,$$

dvs. $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är en "densitet" för hur mycket vätska som produceras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är positiv) eller konsumeras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är negativ).

Geometrisk tolkning av $\mathbf{rot\ F}$:

Antag att $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska.
Placera ut ett skovelhjul med centrum i en punkt (x, y, z)

Hastigheten av hur skovelhjulet snurrar beror på i vilken riktning man placerar rotationsaxeln.



Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är $\mathrm{rot}\ \mathbf{F}$.

Antag att hjulet roterar kring

- en axel med riktningsvektor $\mathbf{n}$ (blå)

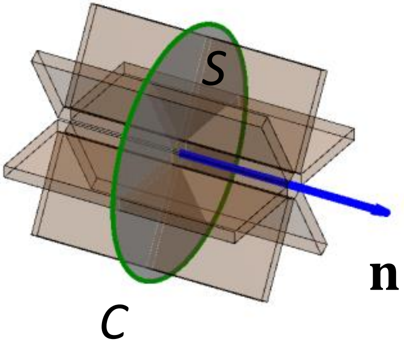
och att det följer

- en cirkel C (grön)

som begränsar

- en yta S (grå)

Då kan man ta $\mathbf{n}$ som normalvektor till S.

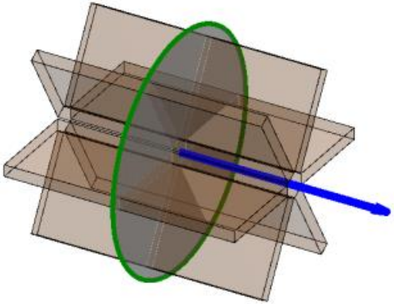


Hur snabbt hjulet roterar är proportionellt mot arbetet av $\mathbf{F}$ längs C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \{ \text{ Stokes sats } \}$$

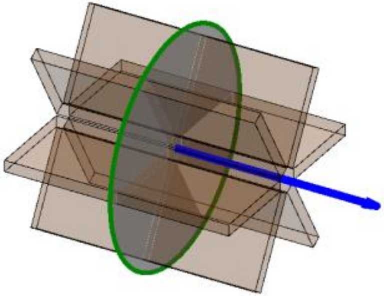
$$= \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$



Hastigheten av hjulet är alltså proportionell mot

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$



Om man delar dubbelintegralen med arean av S och sedan låter radien gå mot 0 så går detta mot $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\ \mathbf{n}$. Detta blir som störst om $\mathbf{n}$ och $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ pekar i samma riktning, dvs:

Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$.

(när storleken på hjulet går mot 0)