Lokala extremvärden

Om $f(x, y)$ har lokalt max/min i (a, b) så är (a, b) en **kritisk punkt**, dvs
$f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$

Modelfall:

$x^2 + y^2$	*lokalt min* i $(0,0)$
$-x^2 - y^2$	*lokalt max* i $(0,0)$
$-x^2 + y^2, x^2 - y^2$	*sadelpunkt* i $(0,0)$, dvs kritisk punkt men varken lokalt max eller min

Andraderivatatestet:

(a, b) en kritisk punkt till $f(x, y)$

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$$

$\underline{D > 0:}$ a) $f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$ *lokalt min*

b) $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ *lokalt max*

$\underline{D < 0:}$ *sadelpunkt*

Hur komma ihåg? Jämför med modellfallen

Globala extremvärden

Om $f(x,y)$ kontinuerlig på sluten begränsad mängd D
så har f globalt max och min på D.

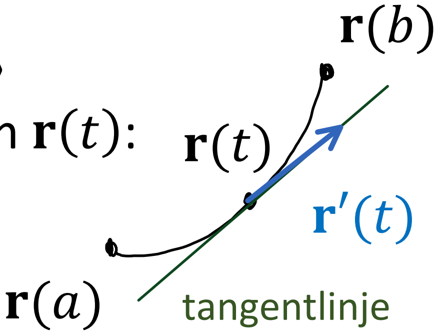
Om f deriverbar kan bestämmas genom att jämföra värdena i:

1) Kritiska punkter inuti D
2) Punkter på randen till D. Kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:
   a. Kritiska punkter längs randkurvorna
   b. "Hörn", dvs ändpunkter till randkurvorna.

Kurvor i rummet

Kurva C parametriserad av $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $a \le t \le b$

Tangentvektor $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$
ger riktningsvektor för tangentlinjen genom $\mathbf{r}(t)$:
$L(s) = \mathbf{r}(t) + s\mathbf{r}'(t)$



Längd $\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| \mathrm{d}t$

Kurvintegral av funktion f: $\int_C f\ ds = \int_a^b f\big(\mathbf{r}(t)\big)|\mathbf{r}'(t)|dt$
$(ds = |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t)$

Dubbelintegraler

$f(x,y) \geq 0$:

$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = volymen\ av\ området\ under\ grafen\ z = f(x,y)$

Kan beräknas med u*pprepad integral t.ex.*

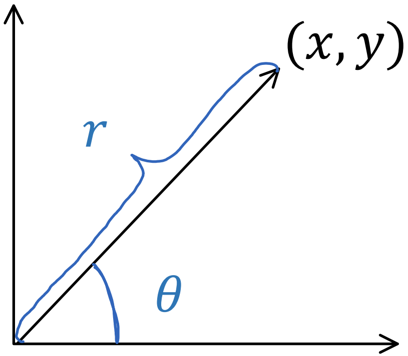
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ så

$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$ alt.

och motsvarande om gränser i x beror på y.

Polära koordinater

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$



Integration över *"polär rektangel" D:*

$a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$

<u>$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$:</u>

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

Trippelintegraler

$\iiint_E \mathrm{d}V = \text{volym av området } E$

Upprepade integraler, t.ex.:

$E = \{(x, y, z) \mid c \le y \le d, a(y) \le z \le b(y), e(y, z) \le x \le f(y, z)\}$

$$\iiint_E g(x, y, z)\mathrm{d}V = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} \int_{e(y,z)}^{f(y,z)} g(x, y, z)\mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y$$

Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy-planet:

$$(x, y, z) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)$$

$$\underline{\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

Sfäriska koordinater

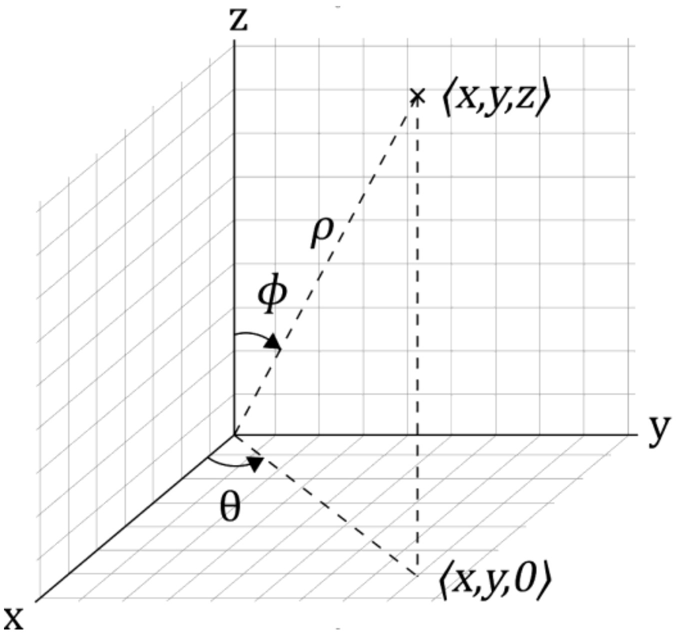
$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$(0 \leq \rho$

$0 \leq \phi \leq \pi,$

oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$

el. $-\pi \leq \theta \leq \pi)$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"

Integration:

$\underline{\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\rho}$