Sammanfattning Föreläsning 8

- Optimering med bivillkor - Lagrangemultiplikatorer:
  För att hitta extremvärden till f(x,y) under bivillkoret att
  g(x,y) = k *(om extremvärden finns och* $\nabla g(x,y) \neq 0$ *på g(x,y)=k):*

1) Hitta alla lösningar (x,y) till $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$ för någon konstant λ

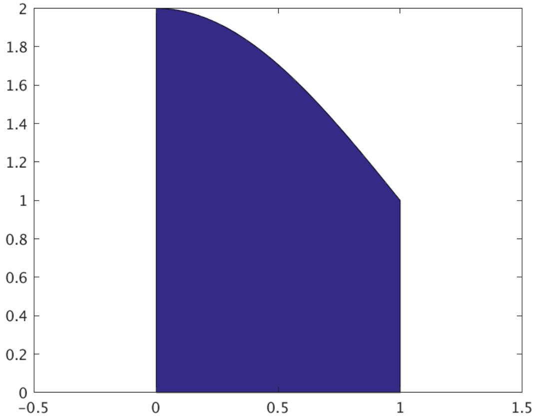
2) Beräkna f(x,y) för alla lösningar från 1). Det största värdet ger maximum och det minsta minimum.

- Längden av en kurva som parametriseras med $\mathbb{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ ges av

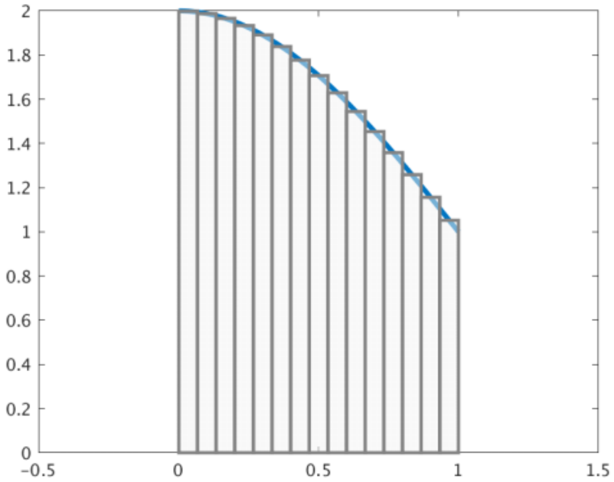
$$\int_a^b |\mathbb{r}'(t)|\,dt.$$

Integraler i en variabel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{"Arean under grafen } f(x)\text{"}$$



Integraler definierade genom att approximera grafen med rektanglar, beräkna arean av rektanglarna och gå i gräns med finare och finare indelning



Gör indelning

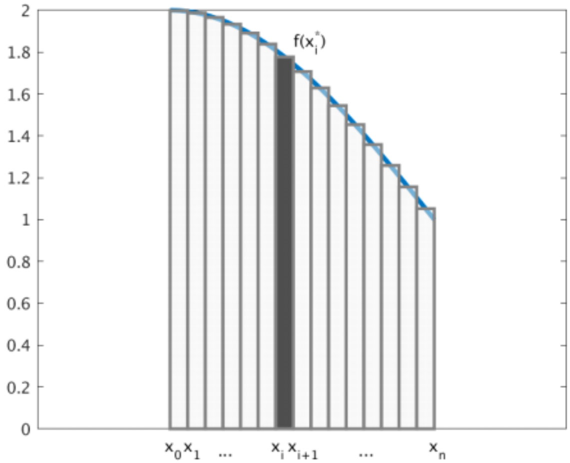
$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$

väljer punkter $x_{\mathrm{i}-1} \leq x_i^* \leq x_{\mathrm{i}}$

och skapar rektanglar mellan

$x_{\mathrm{i}-1}$ och x_{i} i x-led och mellan

0 och $f\left(x_i^*\right)$ i y-led.



Arean av rektangel nr *i*:

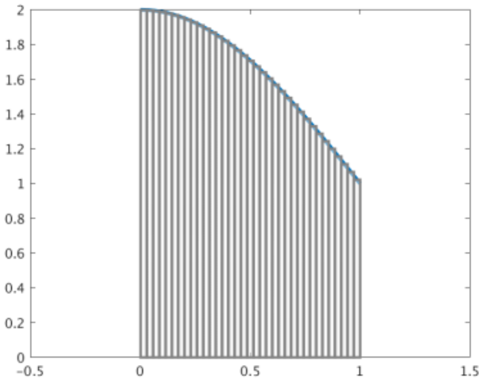
$f(x_i^*)(x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i}-1})$

Area av alla rektanglar (kallas en Riemannsumma för f)

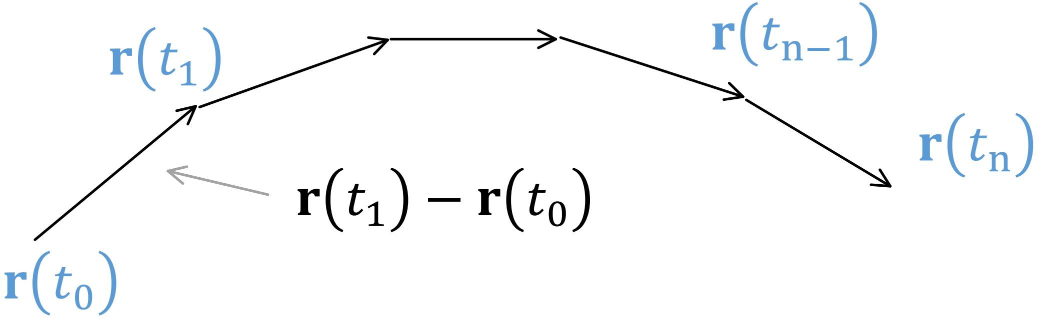
$f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n^*)(x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{n}-1})$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f(x_1^*)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_n^*)(x_\mathrm{n} - x_{\mathrm{n}-1})$$

där gränsvärdet är att man tar finare och finare indelningar (dvs längden av delintervallen går mot 0)



För att beräkna längd av kurva $\mathbf{r}(t)$ mellan a och b, approximerar kurvan med räta linjer, beräknar längden och går i gräns:



Total längd: $|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$

Härleder formel för gränsvärdet av längden

$$\left|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)\right| + \cdots + \left|\mathbf{r}(t_\mathrm{n}) - \mathbf{r}(t_{\mathrm{n}-1})\right|$$

när $n \to \infty$ i specialfallet $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$:

Enligt medelvärdessatsen: $f(t_\mathrm{i}) - f(t_{\mathrm{i}-1}) = f'(t_i^*)(t_\mathrm{i} - t_{\mathrm{i}-1})$
för något $t_\mathrm{i} \leq t_i^* \leq t_{\mathrm{i}-1}$

$$\left|\mathbf{r}(t_\mathrm{i}) - \mathbf{r}(t_{\mathrm{i}-1})\right| = \sqrt{(t_\mathrm{i} - t_{\mathrm{i}-1})^2 + (f(t_\mathrm{i}) - f(t_{\mathrm{i}-1}))^2}$$

$$= \sqrt{(t_\mathrm{i} - t_{\mathrm{i}-1})^2 + (f'(t_i^*)(t_\mathrm{i} - t_{\mathrm{i}-1}))^2} = \sqrt{1 + f'(t_i^*)^2}(t_\mathrm{i} - t_{\mathrm{i}-1})$$

Vi ersätter varje term i totala längden

$$\left|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)\right| + \cdots + \left|\mathbf{r}(t_\mathrm{n}) - \mathbf{r}(t_{\mathrm{n}-1})\right|$$

med $\left|\mathbf{r}(t_\mathrm{i}) - \mathbf{r}(t_{\mathrm{i}-1})\right| = \sqrt{1 + f'(t_i^*)^2}(t_\mathrm{i} - t_{\mathrm{i}-1})$

och får då att längden av den approximerande kurvan blir

$$\sqrt{1 + f'(t_1^*)^2}(t_1 - t_0) + \cdots + \sqrt{1 + f'(t_n^*)^2}(t_\mathrm{n} - t_{\mathrm{n}-1})$$

Längden $\sqrt{1+\ f'(t_1^*)^2}(t_1-t_0)+\cdots+\sqrt{1+\ f'(t_n^*)^2}(t_\mathrm{n}-t_{\mathrm{n}-1})$ av den approximerande kurvan är en Riemannsumma för

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b |\mathbf{r}'(x)|\,\mathrm{d}x$$

så när $n\to\infty$ så går längden av den approximerande kurvan mot integralen ovan vilket motiverar formeln för längden (när kurvan är en graf).

För allmäna kurvor finns en skiss till argument på s. 648-649