LMA017, Föreläsning 1, 4/9

Föreläsningar
tis, tor och fre, 8:15-10:00
(lv 3 och 4 ons isf tor, lv 5 mån 15:15-17 isf lv 6 fre)

Program
Hemsida: Google: LMA017 1819 eller Ping Pong
Föreläsningsprogram & föreläsningsanteckningar, rekommenderade övningar, kurskrav för tentan

Övningar
- tis 10:15-12:00 och tor 10:15-12:00
  2 Grupper, idag: Efternamn A-L: Svea 226, M-Ö: Svea 241, se hemsida
- ons 10:15-12:00 och tor 15:15-17:00
  1 Grupp
  (Obs: imorgon, 5/9, 15:15-17)

Kan välja när som passar med schema.

Kurslitteratur
Stewart, Calculus, 8th ed (som i tidigare matematikkurser, 7:e ok, följ program från förra året)
kap 13-16

Examination
Tenta 30/10, 50p, 20 p - 3:a, 30p - 4:a, 40 p - 5:a

Obs! Glöm inte anmäla er

Detaljerad lista med kursmål på hemsidan

Duggor Möbius (tidigare Maple TA)
3 st, 1 bonuspoäng/dugga

- Dugga 1: tor lv2 13:00 – mån lv4 18:00.
- Dugga 2: tor lv4 13:00 – mån lv6 18:00.
- Dugga 3: tor lv6 13:00 – fre lv8 18:00.

Studentrepresentanter
Matilda Hurtig (KSTR)
Robin Linder Saied (TIMEL)
Vivian Nguyen (ALLM)
Erik Nygren (TKDAT)
Kevin Vilhjalmsson (KSTR)

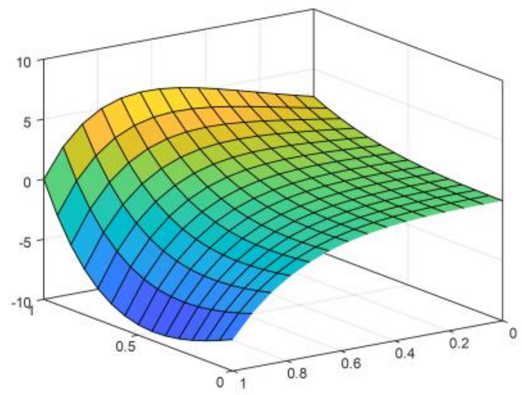
Möten lv2,lv5 och efter avslutad kurs.

Mattesupport
Biblioteket
- Lindholmen, tis 15:30-17:30
- Johanneberg, ons, tor 17:00-19:00

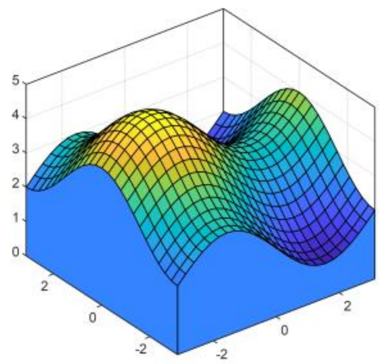
Kursinnehåll

Exempel på frågor som kursen går igenom hur man löser:

1) Om man har funktionen $f(x, y) = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$, vad är dess största och minsta värde då $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$?



2) Vad är arean av ytan $z = 3 - \sin(x) - \cos(y)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$, och vad är volymen av området under den ytan?



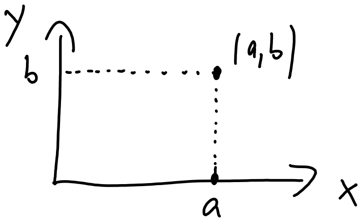
3) Om temperaturen på varje punkt på jordytan är given, vad är medeltemperaturen?

4) Om vatten strömmar genom en bassäng och dess hastighet är given, hur mycket vatten passerar en viss yta?

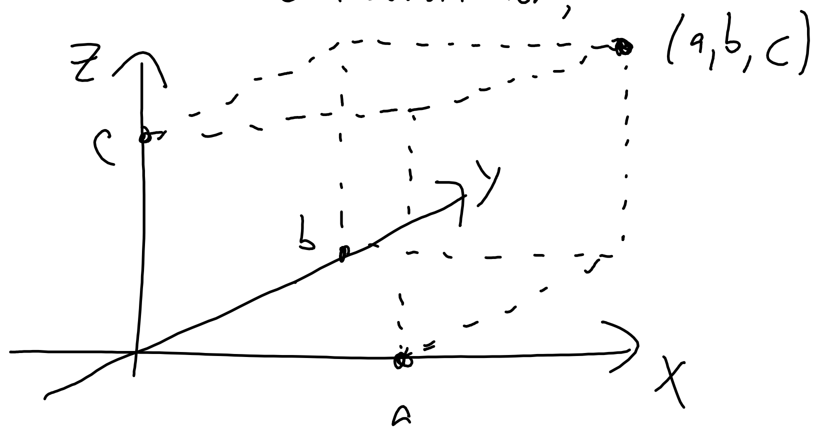
Inledning

Punkter i:

- **planet** $\mathbb{R}^2$ beskrivs med två koordinater, oftast (x,y)



- rummet $\mathbb{R}^3$ beskrivs med tre koordinater, oftast (x,y,z)



(ritar nästan alltid z uppåt, ibland x framåt för enklare förstå figur)

I envariabelanalys, studerade funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, naturligt studera vektorvärda funktioner

$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$f = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)).$$

n **komponenter**,
m **variabler**

För allmänt. I kursen viktiga specialfall:

- $m=1,\ n=2,3$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad f(t)=\langle f_1(t), f_2(t)\rangle \in \mathbb{R}^2$

  idag+lv. 3 $\quad$ 1 variabel t bestämmer
  2 komponenter $f_1(t),\ f_2(t)$.

(skriver ofta fallet $n=2$ för lättare skriva, generaliserar nästan alltid enkelt till 3 eller fler variabler/komponenter)

- $m=2,3,\ n=1$ $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad f(x,y)\in\mathbb{R}$

  imorgon – lv. 5 $\quad$ 2 variabler, x,y bestämmer ett tal $f(x,y)$.

- $n=m=2,3$ $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

  lv 6–7 $\quad$ (vektorfält)

Kurvor i rummet och planet $\quad$ 13.1

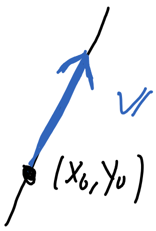
Def $\quad$ En <u>kurva</u> C i planet är alla punkter vars position ges av

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle \qquad (\mathbf{r} \text{ är } r \text{ i "fetstil"})$$

där $x(t), y(t)$ kont. funktioner på ett intervall

$\mathbf{r}(t)$ kallas en <u>parametrisering</u> av C

Ex En rät linje genom en punkt (x_0, y_0) med riktningsvektor $\mathbb{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ är en kurva som kan parametriseras av



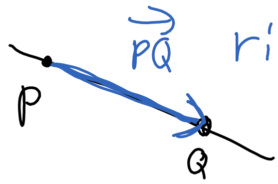
$$\mathbb{r}(t) = \langle x_0 + tv_1,\ y_0 + tv_1 \rangle$$

[Om byter ut $\mathbb{v}$ mot $-\mathbb{v}$ eller $2\mathbb{v}$, får samma kurva, men annan parametrisering]

[dvs., kurvan är punkterna, parametriseringen hur går längs punkterna]

b) Den räta linjen genom $P = (x_0, y_0)$ och $Q = (x_1, y_1)$ kan parametriseras av:

$$\mathbb{r}(t) = P + t\overrightarrow{PQ} = \langle x_0 + t(x_1 - x_0),\ y_0 + t(y_1 - y_0) \rangle$$



Motsvarande för kurvor i rummet.

Ex Ge en parametrisering av skärningen mellan ytorna $z = x^2$ och $x = y^3$

På skärningen är $z = x^2 = (y^3)^2 = y^6$,

så $x = y^3$ och $z = y^6$,

dvs x och z bestäms av y, så kurvan ges av

$$\langle y^3, y, y^6 \rangle \quad y \in \mathbb{R}$$

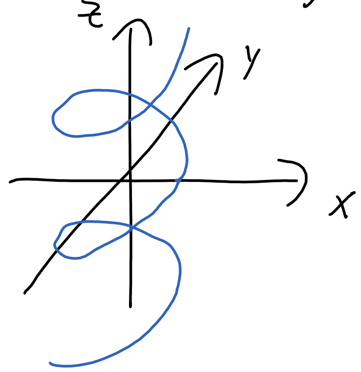
($\in$: y tillhör $\mathbb{R}$)

Inför gärna ny parameter t:

$$\mathbb{r}(t) = \langle t^3, t, t^6 \rangle.$$

Ex Skissa kurvan $\mathbb{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$

När t ökar så ökar $z(t)$ med konstant fart och $(x(t), y(t))$ går motsols med konstant fart längs enhetscirkeln. Får spiral:



Om $\mathbb{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ def. för t nära t_0 så ges <u>gränsvärdet</u> av $\mathbb{r}(t)$ när t går mot t_0 av

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t) \right\rangle$$

om gränsv. i högerledet existerar.

(Behövs för följande definition)

Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer 13.2

Def Derivatan av $\mathbf{r}(t)$ ges av

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.

Om $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, $x(t), y(t)$ deriverbara så är

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \left\langle \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right\rangle = \langle x'(t), y'(t) \rangle.$$

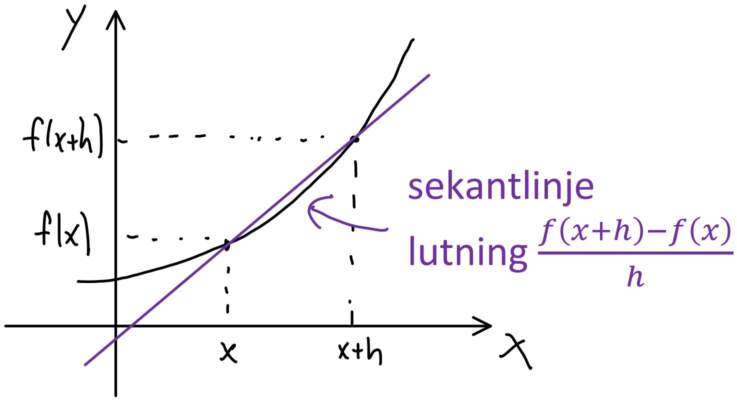
(def. av gränsv. av vektorvärd funktion)

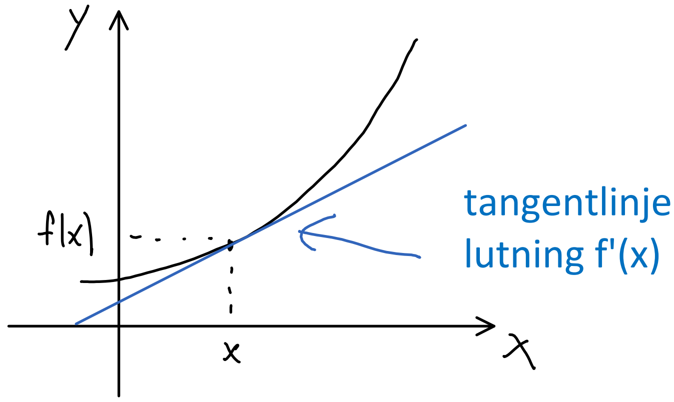
Ex Låt $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$. Beräkna $\mathbf{r}'(t)$

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle.$$

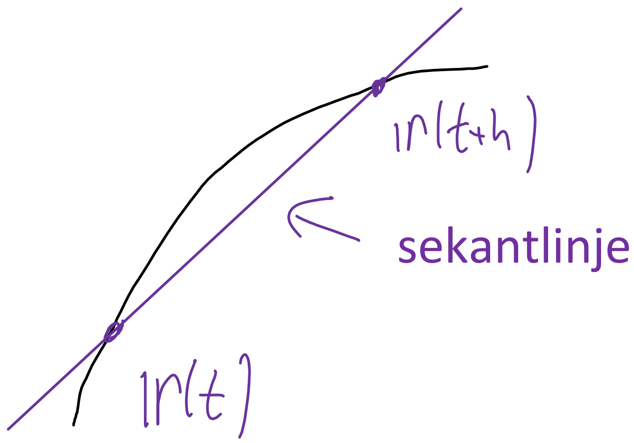
Geometrisk innebörd av $\boldsymbol{r}'(t)$

Påminnelse: Derivatan är lutningen av tangentlinjen vars lutning är gränsvärdet av lutningen av sekantlinjer





Kan göra motsvarande med sekantlinjen mellan $\boldsymbol{r}(t)$ och $\boldsymbol{r}(t+h)$

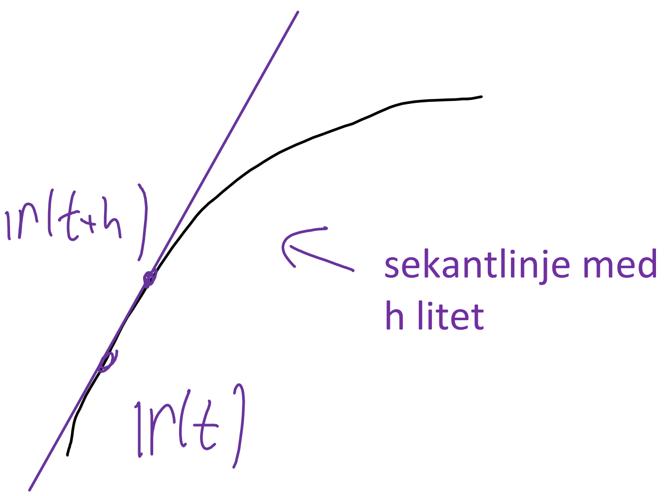


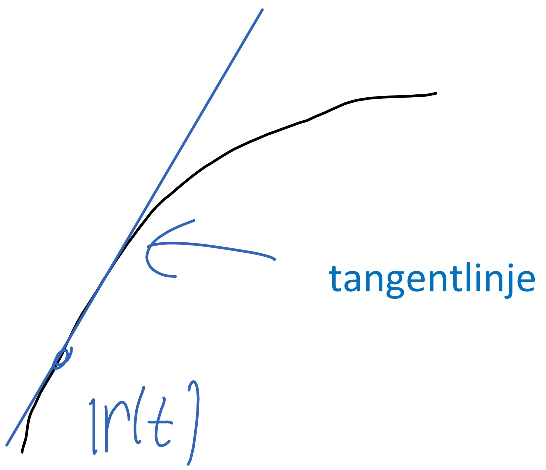
riktningsvektor $\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)$

eller $\dfrac{\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)}{h}$

(multiplar av riktningsvektor till linje ger samma linje)

Om låter $h \to 0$, får riktningsvektor $\boldsymbol{r}'(t)$ som är gränsvärdet av riktningsvektorer för sekantlinjerna.





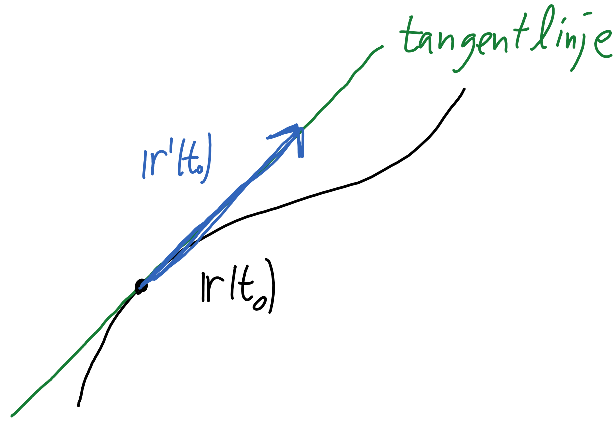
Inför därför:

<u>Def</u> $\mathbf{r}'(t)$ kallas <u>tangentvektorn</u> till $\mathbf{r}(t)$ och linjen genom punkten $P=\mathbf{r}(t_0)$ med riktningsvektor $\mathbf{r}'(t_0)$ kallas <u>tangentlinjen</u> till $\mathbf{r}$ i P.

(Den räta linje som "är närmast" $\mathbf{r}$ nära P)

Tangentlinjen ges av

$$L(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\,\mathbf{r}'(t_0).$$



<u>Ex</u> Bestäm tangentlinjen till $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t}\rangle$ i punkten $P = \mathbf{r}(4) = (4, \sqrt{4}) = (4, 2)$.

<u>Tangentvektor</u>: $\mathbf{r}'(t) = \langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}}\rangle$

$$\mathbf{r}'(4) = \langle 2, \frac{1}{2\sqrt{4}}\rangle = \langle 2, \frac{1}{4}\rangle.$$

<u>Tangentlinje</u> $L(t) = \langle 4,2\rangle + t\langle 2, \frac{1}{4}\rangle = \langle 4+2t, 2+\frac{t}{4}\rangle.$