Sammanfattning Föreläsning 9

- Längd av kurva parametriserad av $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$:
  - $l = \displaystyle\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$

- En vektorvärd funktion $\mathbf{r}(t)$ kan beskriva en partikel eller kropps rörelse. Då är dess

  hastighet $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$

  fart $|\mathbf{r}'(t)|$

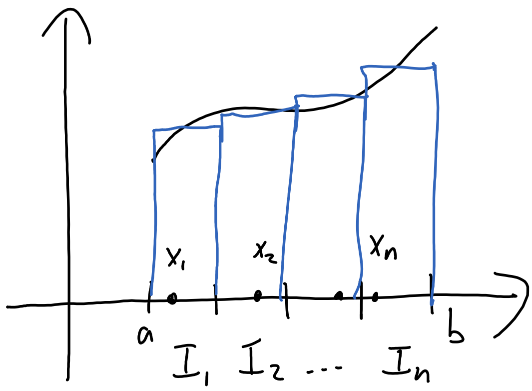
  acceleration $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$

- Newtons andra lag, Newtons gravitationslag

Dubbelintegraler och volymer 15.1

Påminnelse: Definierar $\int_a^b f(x)\,dx$ s.a. blir "arean under grafen $y=f(x)$", genom att approximera med rektanglar, beräkna dess area och gå i gräns.

Antar delar in $[a,b]$ i n st. lika stora delintervall, $I_1, \ldots, I_n$ av längd $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ och tar någon punkt $x_i \in I_i$ för $i = 1, \ldots, n$.



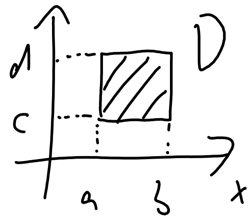
(I genomgång i fredags, använde x_i^*, här x_i för enklare skriva)

Total area $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x.$

(Använder sigma-notation för summor, se avsn. 5.1)

Integralen alt. arean under grafen definierad som gränsvärdet av totala arean ovan när $n \to \infty$, om det finns.

Om $f(x,y)$ def. på rektangel $D = [a,b] \times [c,d] =$
$= \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$,
vill på motsvarande sätt definiera dubbelintegralen av f över D som

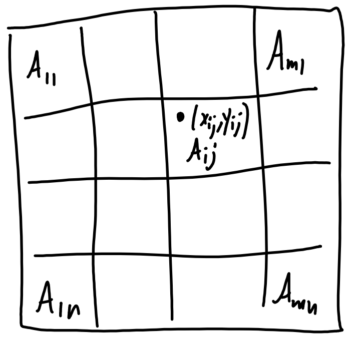


$$\iint_D f(x,y)\,dA = \text{"volymen under grafen } z = f(x,y)\text{"}$$

Approximerar med lådor för att ge mening åt volymen:

Delar in D i $m \times n$ rektanglar A_{ij} med area

$$\Delta A = \frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n} \quad \text{och tar} \quad (x_{ij}, y_{ij}) \in A_{ij}$$



Då är volymen av grafen ungefär

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A$$

(ger volymen när f är konstant $f(x_{ij}, y_{ij})$ på A_{ij})

<u>Def</u> $$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A$$

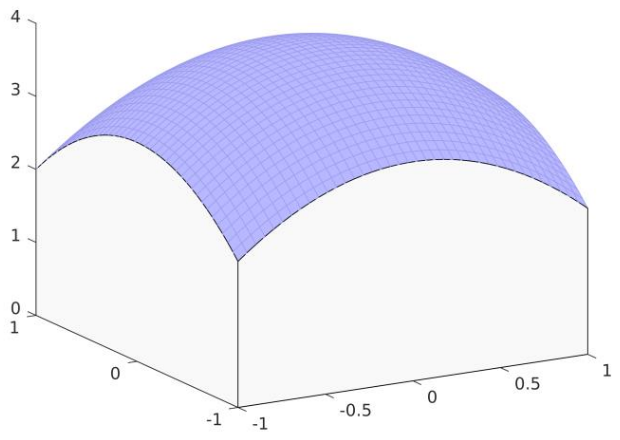
om gränsvärdet existerar. Säger då att f är <u>integrerbar</u>.

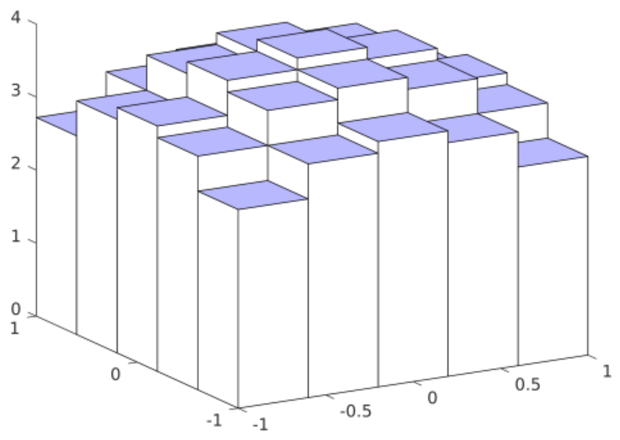
(Menar här att gränsvärdet finns och är samma oberoende val av (x_{ij}, y_{ij}))

Om $f(x,y) \geq 0$ och f är integrerbar definierar man <u>volymen</u> av kroppen mellan D och $z=f(x,y)$ som

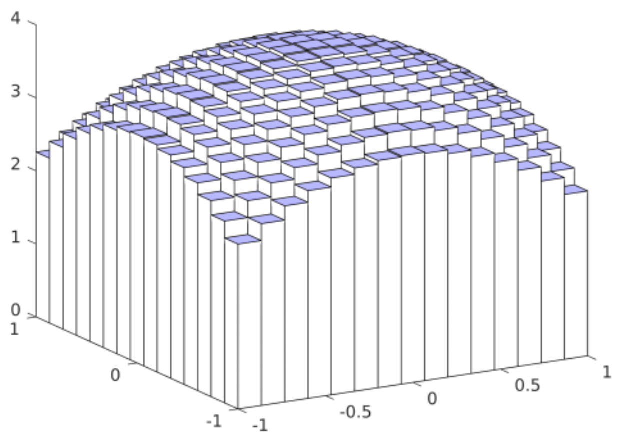
$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

$$z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

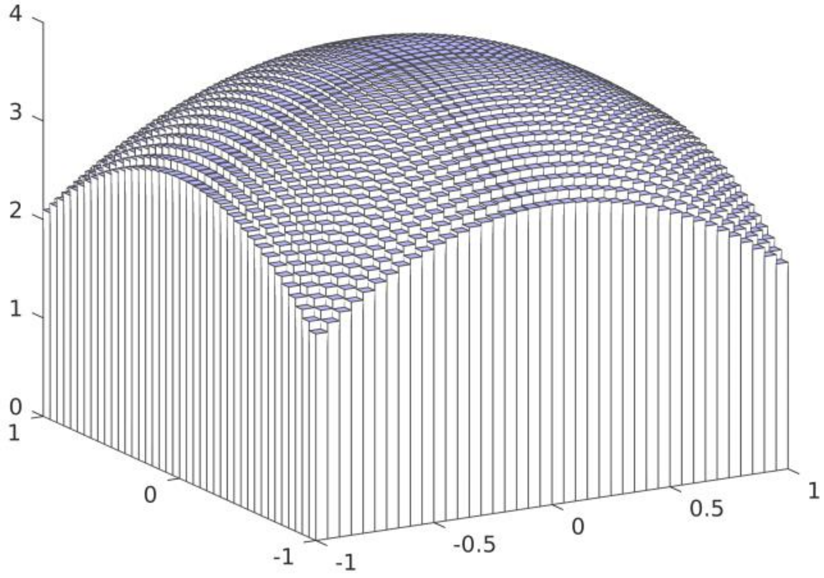




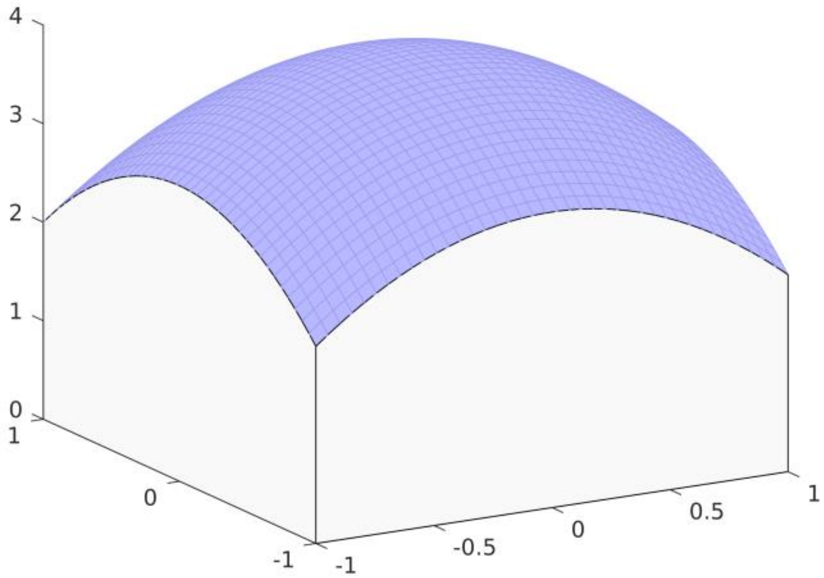
$n = m = 5$, volym 13,4400...



$n = m = 15$, volym 13,3452...



$n = m = 40$, volym $13{,}3350 \ldots$

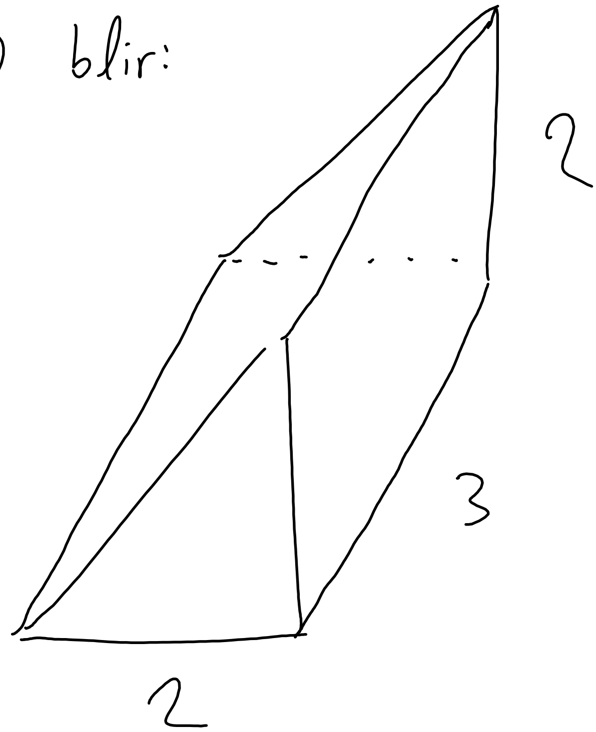


$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}A = 13{,}333 \ldots$
(snart hur kan beräkna detta)

Ex Låt $D=[0,2]\times[0,3]$ och $f(x,y)=x$.

Bestäm vad $\iint_D x\,dA$ bör vara genom att tolka integralen som en volym.

Grafen $z=x$ över D blir:



Är hälften av ett rätblock med sidor 2, 3 och 2, så volymen och integralen bör vara

$$2\cdot3\cdot2/2=6.$$

(Skall se snart hur kan verifiera detta)

När kan integrera, och hur?

Sats Om f är kontinuerlig på D, då är f integrerbar.

(Räcker lite mindre, begränsad och kont. förutom längs ändligt antal glatta kurvor. Behövs nästa gång.)

Upprepade integraler 15.1

Skriver $\int_a^b f(x,y)\,dx$ för integralen när ser y som fix

och integrerar $g(x) = f(x,y)$ mellan a och b, och

motsvarande för $\int_c^d f(x,y)\,dy$.

(Motsvarar partiell derivata fast för bestämda integraler)

Formel för att beräkna integraler:

Fubinis sats: Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D = [a,b] \times [c,d]$,

så är
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Ex Beräkna $\iint_D x\,dA$, där $D = [0,2]\times[0,3]$.

Alt 1: $\displaystyle\iint_D x\,dA = \int_0^2 \left(\int_0^3 x\,dy \right) dx =$

$\Big($ x fix $\Rightarrow$ om $h(y) = xy$ så är $h'(y) = x$, så
$\displaystyle\int_0^3 x\,dy = \Big[xy\Big]_{y=0}^{y=3} = 3x - 0 = 3x$ $\Big)$

$$= \int_0^2 3x\,dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = 6.$$

Alt 2: $\displaystyle\iint_D x\,dA = \int_0^3 \left(\int_0^2 x\,dx \right) dy = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2} dy$

$$= \int_0^3 2\,dy = \Big[2y\Big]_0^3 = 6.$$

Lika, och samma som förväntat av tidigare ex.

(Här, olika men ingen väsentlig skillnad vilken ordning.
Senare, exempel där lätt i en ordning, hopplöst i andra)

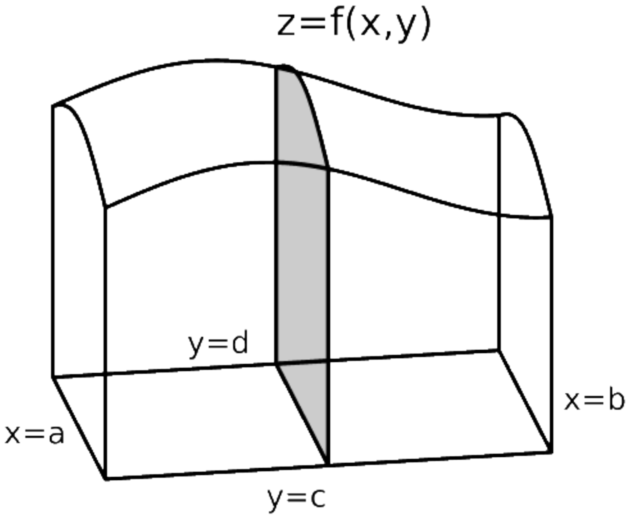
Idé Fubinis sats

I en variabel, area = integral av höjd.

Bör ha motsvarande:

volym =
integral av tvärsnittsarea,

jmf. avsnitt 6.2.



Om x fix, tvärsnittsarea: $A(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$

$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A =$ "volymen under $z = f(x,y)$" $=$

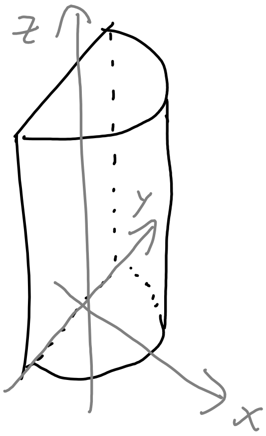
$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right)$$

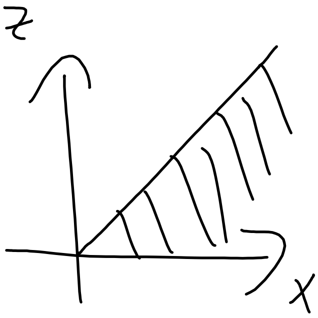
Dubbelintegraler över allmänna områden 15.2

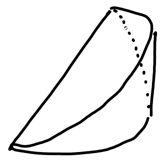
Vad är volymen av den delen av halva cylindern

$x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, som ligger mellan planen

$z=0$ och $z=x$?







"apelsinklyfta"

Är området under grafen $z=f(x,y)=x$, $(x,y)\in D$,

$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$, så borde vara

$\iint_D z\,dA$, men har hittills bara def. dubbelintegraler

över rektanglar.

Hur definiera sådana integraler?

<u>Def</u> Dubbelintegral över allmänna områden

Låt $f(x,y)$ vara def. på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, begränsat område.

Låt R vara en rektangel som innehåller D och låt

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då definierar man $\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$

(om F är integrerbar)

Eftersom $F(x,y) = 0$ utanför D bidrar den delen inte till volymen mellan grafen $z = F(x,y)$ och R, och på D är $F(x,y) = f(x,y)$ så borde vara rimlig def. av integral av f över D.