LMA017, Föreläsning 12, 28/9

Sammanfattning Föreläsning 11

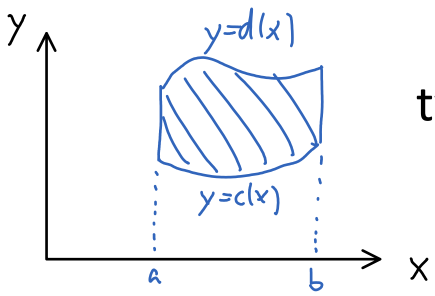
Område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ av **typ I** om

$D = \{(x,y) | \, a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}$,

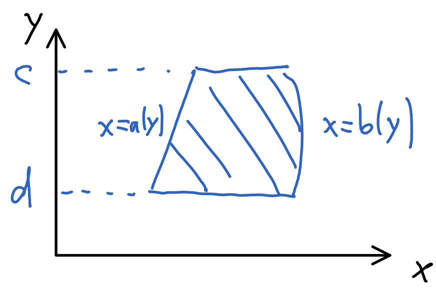
$c(x), d(x)$ kontinuerliga, och av **typ II** om

$D = \{(x,y) | \, c \le y \le d, a(y) \le x \le b(y)\}$,

$a(y), b(y)$ kontinuerliga



typ I



typ II

Sats Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av **typ I** eller **typ II** så är kontinuerliga funktioner på D integrerbara.

Om $D = \{ (x,y) | \, a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x) \}$ (typ I) är

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Om $D = \{ (x,y) | \, c \le y \le d, a(y) \le x \le b(y) \}$ (typ II) är

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Obs

1) Dugga 2 öppen, stänger måndag 8/10, kl 18:00

2) Föreläsning på måndag 1/10, 15:15-17:00,
   ingen föreläsning på fredag 12/10

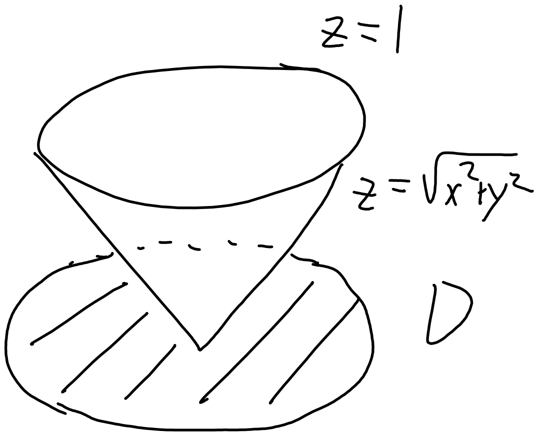
Dubbelintegraler och polära koordinater 15.3

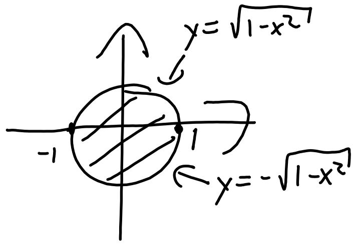
Ex Beräkna volymen av området mellan konen $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$ och planet $z=1$.

$x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0 \iff z=\sqrt{x^2+y^2}=r$, r avståndet till origo, blir en kon (rita grafen till $z=\sqrt{x^2+y^2}$ längs x-axeln, där $x=r$ och rotera kring z-axeln)

Området ligger mellan graferna $z=\sqrt{x^2+y^2}$ och $z=1$.

Skär varandra då $1=z=\sqrt{x^2+y^2}$. Så området ges av $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$ där $(x,y)\in D=\{x^2+y^2\leq 1\}$.





D är ett typ I-område:

$D=\{(x,y) \mid -1\leq x\leq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}$ $\quad (x^2+y^2=1 \iff y=\pm\sqrt{1-x^2})$

Områdets volym blir då:

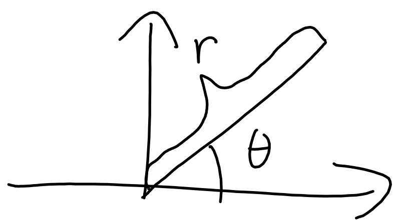
$$\iint_D 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

Går, men ganska krångligt att beräkna.

Idag: Enklare sätt.

En punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ kan beskrivas med <u>polära koordinater</u> (r,θ) genom

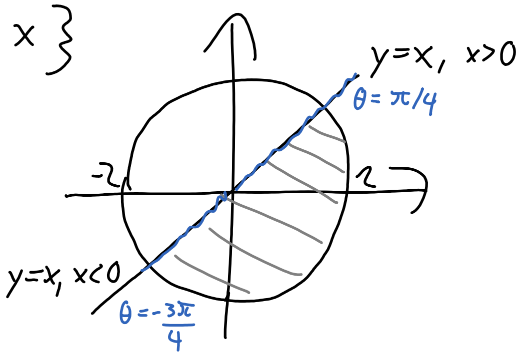
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$r=\sqrt{x^2+y^2}$

<u>Ex</u> Området $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4,\ y\leq x\}$

ges i polära koordinater av:

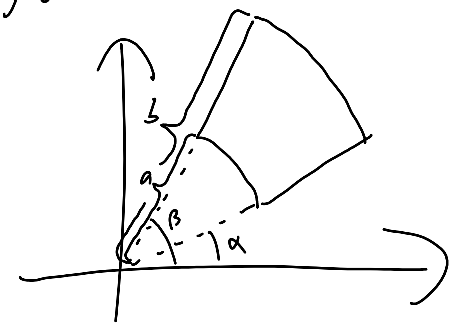


$\{(r,\theta)\mid -\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq r\leq 2\}$.

($y=x,\ x<0$ ges också av t.ex. $\theta=\frac{5\pi}{4}$, men hade isf behövt ta $\theta=2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$ för linjen $y=x,\ x>0$)

Def Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en <u>polär rektangel</u> om det i polära koordinater (r, θ) ges av

$a \le r \le b, \quad \alpha \le \theta \le \beta.$



area $$\frac{(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)}{2}$$

(om $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ $a = 0$, area πb^2
allmänna fallet följer av det.)

Integration i polära koordinater

Sats Låt D vara en polär rektangel, $a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$.

Då är
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

Obs: Vänsterledet integral över allmänt område (15.2)
Högerleden upprepade integraler (15.1)

Man sammanfattar detta ofta

$$\boxed{\begin{gathered} dA = r\,dr\,d\theta = r\,d\theta\,dr \\ (\text{alt. } dx\,dy = r\,dr\,d\theta \end{gathered}}$$

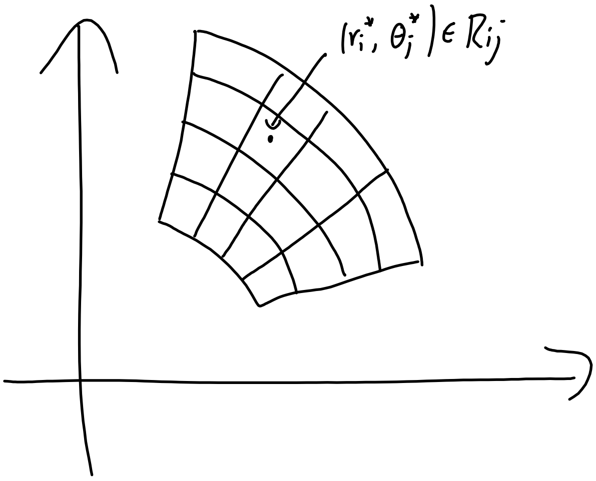
Så här i formelblad.

Beviside: Efterlikna def. av integral över rektangel, dela in i "polära delrektanglar":
Delar in $[a,b]$ i m st. lika stora delintervall $[r_{i-1}, r_i]$ av längd $\Delta r = \frac{b-a}{m}$, och $[\alpha, \beta]$ i n st. lika stora delintervall $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ av längd $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$.

Låt också $r_i^* = \dfrac{r_{i-1}+r_i}{2}$,

$$\theta_j^* = \frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}$$

Låt R_{ij} ges i polära koord. av: $r_{i-1} \le r \le r_i$, $\theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j$



Area av R_{ij} är

$$\Delta R_{ij} = \frac{(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})}{2} = \frac{(r_i + r_{i-1})}{2}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) = r_i^* \Delta r \Delta\theta.$$

Integralen över D bör ges av gränsvärdet av Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*) \Delta R_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta.$$

Detta är också en Riemannsumma för

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta \,.$$

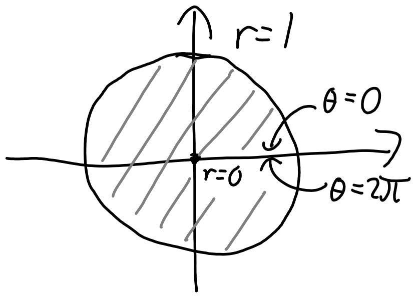
vilket motiverar formeln.

Ex Beräkna $\iint_D 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dA$, där $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$.

(Från början av föreläsningen)

I polära koordinater ges området av

$$\{(r,\theta) \mid 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$



och

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}} = r \quad (r\ge 0)$$

Så

$$\iint_D 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)\, r\, d\theta\, dr = \int_0^1 \Big[(r-r^2)\,\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr =$$

glöm inte!

$$= 2\pi\int_0^1 r-r^2\,dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

(Area av kon är basarea gånger höjd genom 3)

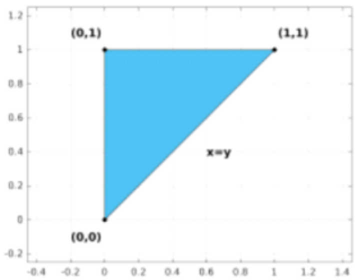
Upprepad integration

Vilka av följande upprepade integraler är lika med $\iint_D f(x,y)\,dA$, där $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$? *(Mer än ett svar kan vara rätt)*

✓ $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$	42%
✗ $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$	39%
✗ $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$	12%
✗ $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dy\,dx$	7%

Upprepad integration II

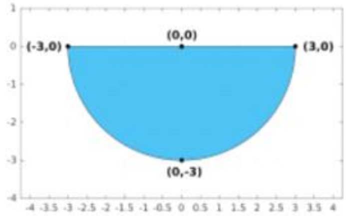
Vilken av följande upprepade integraler är lika med $\iint_D f(x,y)\,dA$, där D är som i följande figur? *(Mer än ett svar kan vara rätt)*



✓ $\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx$	39%
✗ $\int_x^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$	28%
✗ $\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$	18%
✓ $\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy$	15%

Polär integration

Vilka av följande upprepade integraler är lika med $\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dA$, där $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 9, y \le 0\}$ som i följande figur? *(Mer än ett svar kan vara rätt)*



- ✓ $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$ — 42%
- ✗ $\int_{-3}^{3}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2)r\,d\theta\,dr$ — 27%
- ✓ $\int_{0}^{3}\int_{-\pi}^{0} \sin(r^2)r\,d\theta\,dr$ — 26%
- ✗ $\int_{0}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$ — 5%