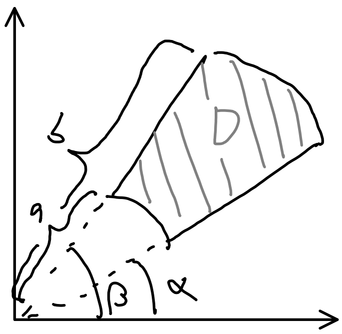
Sammanfattning Föreläsning 12

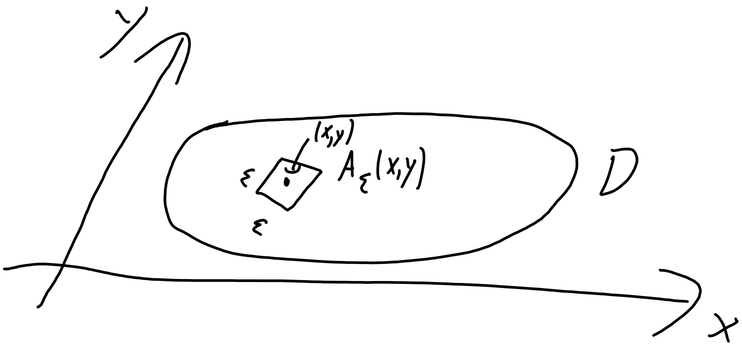


- Polära koordinater
  $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

- Integration över polär rektangel:
  Om D i polära koordinater ges av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$:
  $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta dr$
  $= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr d\theta$

Densitet, massa och masscentrum 15.4

Låt D vara en tunn skiva (lamina) som representeras av $D \subseteq \mathbb{R}^2$, med <u>densitet</u> $\rho(x,y)$.



A_ε kvadrat, centrum i (x,y) sidlängd ε.

$$\rho(x,y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{massa}(A_\varepsilon(x,y))}{\text{area}(A_\varepsilon(x,y))}$$

"densitet = massa/areaenhet"

Om E litet område kring (x,y), bör ha

$$\rho(x,y) \approx \frac{\text{massa}(E)}{\text{area}(E)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{massa}(E) \approx \rho(x,y)\,\text{area}(E) \qquad (*)$$

Med hjälp av $\rho(x,y)$, hur kan man beskriva massan och masscentrum av D?

Massa Kan anta D rektangel genom att låta $\rho(x,y) = 0$ om $(x,y) \notin D$. Delar in D i $M \times N$ st. lika stora delrektanglar R_{ij}, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$, (M isf m för att inte blanda ihop med massan m) med area ΔR och tar $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$. Om M, N stora blir alla R_{ij} små, så att från $(*)$:

$$\text{massa}(R_{ij}) \approx \rho(x_{ij}, y_{ij}) \Delta R$$

Totala massan blir då

$$m = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \text{massa}(R_{ij}) \approx \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \rho(x_{ij}, y_{ij}) \Delta R.$$

Högerledet är en Riemannsumma för $\iint_D \rho(x,y)\, dA$, så går mot integralen när $M, N \to \infty$.
Samtidigt bör uppskattningen av massan bli bättre och bättre desto större M, N är, vilket ger:

Formel för massan av skiva D i planet med densitet $\rho(x,y)$

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA.$$

Masscentrum

<u>Momentet</u> med avseende på x-axeln kring $x=a$ av en partikel med position (x,y) och massa m är $m(x-a)$

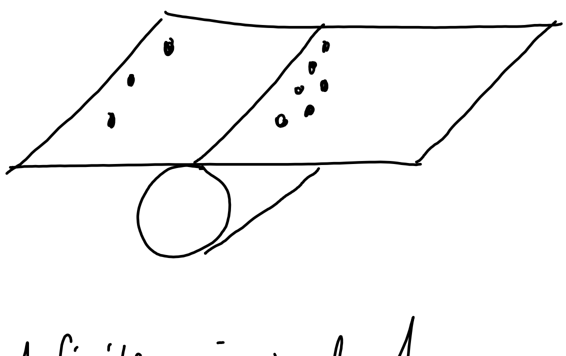
(proportionell mot massan och avståndet till $x=a$ olika tecken om $x<a$ el. $x>a$)

En samling partiklar med positioner (x_i, y_i) och masson m_i för $i=1,\dots,n$ är i <u>jämvikt kring $x=a$</u> om dess totala moment

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-a)$$

m.a.p. x-axeln kring $x=a$ är 0.

Om placerar ut partiklarna på gungbräda som kan rotera kring $x=a$ så innebär jämvikt att gungbrädan inte rör sig.



Motsvarande definition i y-led.

Man kan härleda på liknande sätt som för massan

(den proceduren kan ses som att ersätter delen R_{ij} med partikel med position (x_{ij}, y_{ij}) och massa $\rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \text{area}(R_{ij})$)

Om man har en tunn skiva D med densitet $\rho(x,y)$ så är dess totala moment m.a.p. x-axeln kring $x=a$:

$$\iint_D (x-a)\rho(x,y)\,dA.$$

Får då att är i jämvikt kring $x=a$ om totala momentet är 0, dvs

$$\underbrace{\iint_D x\rho(x,y)\,dA}_{M_x \text{ - momentet m.a.p. x-axeln (kring } x=0)} - a\underbrace{\iint_D \rho(x,y)\,dA}_{=m} = 0$$

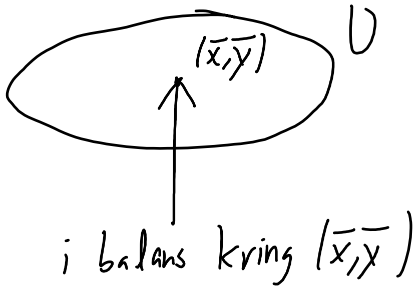
$$\Rightarrow \quad a = \frac{M_x}{m}.$$

<u>Formel för masscentrum</u> $(\bar{x}, \bar{y})$ för en skiva D med densitet $\rho(x,y)$:

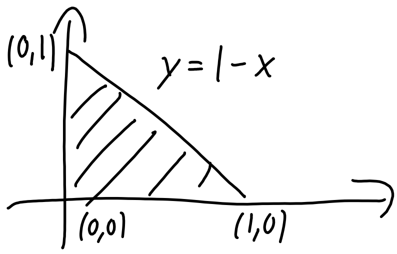
$$\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA$$

$$\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA.$$

där $m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$.



Ex Beräkna massa och masscentrum för triangeln D med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,0)$. och densitet $\rho(x,y) = 1$.



$$m = \iint_D 1\,dA = \text{area}(D) = \frac{1}{2}.$$

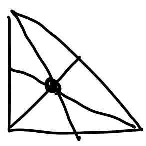
$$M_x = \iint_D x\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} x\,dy\,dx = \int_0^1 (1-x)x\,dx =$$

$$= \int_0^1 x - x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Av symmetriskäl: $M_y = M_x = \frac{1}{6}$, så

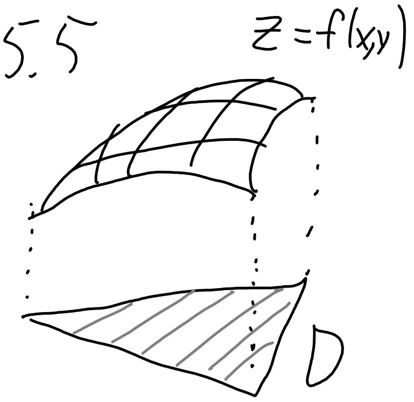
masscentrum är $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(I triangel är masscentrum skärningspunkten av medianerna.



kan verifiera ger $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$)

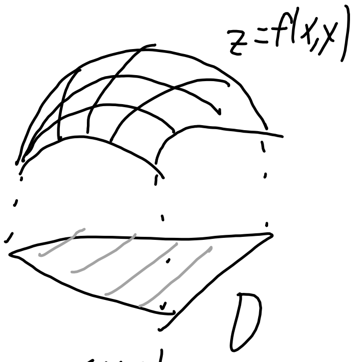
Area av grafen till en funktion 15.5



$f(x,y)$ def. på D ger en yta:

Grafen $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$.

Area av grafen:



$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA.$$

Jämför: Längden av en graf $y=f(x)$, $a\le x\le b$, ges av liknande formel:

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Nästa vecka, formel för mer allmänna ytor (och kort om varför formeln blir så)

Ex Bestäm arean av ytan $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$,

där $f(x,y) = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ och $D = [0,1] \times [0,2]$

$$f_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = \sqrt{x}, \qquad f_y = \sqrt{y}.$$

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2} = \sqrt{1+x+y}.$$

$$A = \iint_D \sqrt{1+x+y}\, dA = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{1+x+y}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(1+x+y)^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (3+x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{(3+x)^{5/2} - (1+x)^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{4}{15}\left(4^{5/2} - 2^{5/2} - \left(3^{5/2} - 1^{5/2}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{15}\left(33 - 4\sqrt{2} - 9\sqrt{3} \right)$$

(Kan kolla att är > 0)