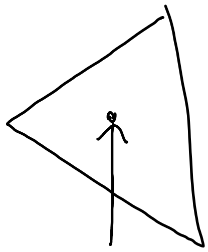
Sammanfattning Föreläsning 13



- D tunn skiva i planet, densitet $\rho(x, y)$.
  - Massa $m = \iint_D \rho(x, y)dA$.
  - Masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right)$ där
    - $M_x = \iint_D x\,\rho(x, y)dA$ och $M_y = \iint_D y\,\rho(x, y)dA$

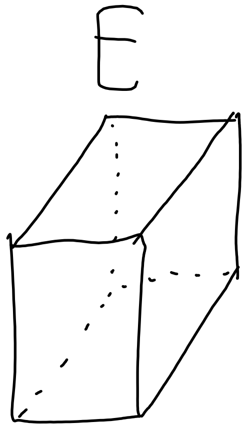
- Area av grafen $z = f(x, y), (x, y) \in D$:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dA$$

Trippelintegraler 15.6

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ område. $g(x,y,z)$ def. på E.
Definierar trippelintegralen av g över E

$$\iiint_E g(x,y,z)\,dV$$



på analogt sätt som dubbelintegraler,
först när E rätblock (låda) m.h.a. Riemannsummor,
sedan för allmänna begränsade områden genom att
reducera till fallet med rätblock.

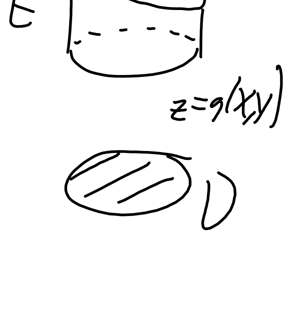
(Genom att def. en funktion på ett rätblock som är lika med
den givna funktionen på E och 0 utanför.)

Kommer idag anta alla funktioner är kontinuerliga s.a.
alla integraler existerar.

Upprepad integration i trippelintegraler

Om $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ e(x,y) \le z \le f(x,y)\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, är

$$\iiint_E g(x,y,z)\,dV = \iint_D \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\,dz\,dA$$



Om t.ex. $D=\{(x,y) \mid a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x)\}$ (typ I-område) s.a.

$E=\{(x,y,z) \mid a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x),\ e(x,y)\le z\le f(x,y)\}$ blir då

$$\iiint_E g(x,y,z) = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Får motsvarande om byter roller på variablerna, t.ex.

om $E=\{(x,y,z) \mid e\le z\le f,\ a(z)\le x\le b(z),\ c(x,z)\le y\le d(x,z)\}$

Så är

$$\iiint_E g(x,y,z)\,dV = \int_e^f \int_{a(z)}^{b(z)} \int_{c(x,z)}^{d(x,z)} g(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

Ex Beräkna $\iiint_E z\,dV$ där E är tetraedern som begränsas av planen

$x=0,\ y=0,\ z=0$ och $2x+y+z=2$.

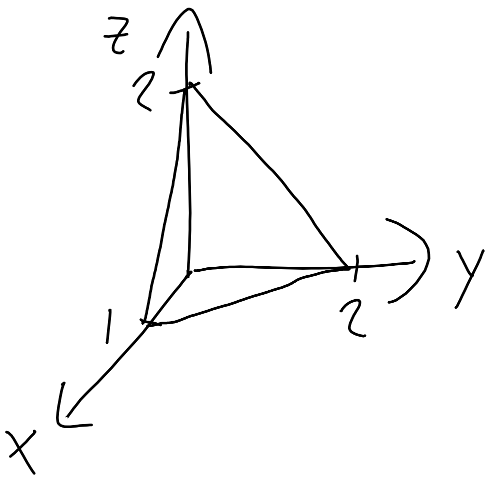
Området mellan ett antal ytor som bestäms av några likheter beskrivs ofta av motsvarande olikheter ($\leq$ el. $\geq$). Vilket håll? Rita figur.

$2x+y+z=2$ är ett plan. Kollar först var skär x, y och z-axeln för att rita:

Skär x-axeln när $y=z=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$, dvs. i $(1,0,0)$.

Skär y-axeln i $(0,2,0)$

Skär z-axeln i $(0,0,2)$



Området E blir:

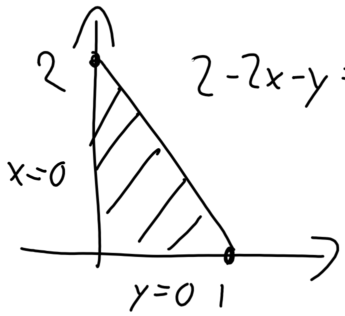
$$E = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 2x+y+z \leq 2\}.$$

(varför ≤ 2 i sista? området när z under $z=2-2x-y$, alt. t.ex. $(0,0,0)$ på "rätt sida", och $2\cdot 0+0+0=0 \leq 2$)

Kan kombinera de två sista: $0 \leq z \leq 2-2x-y$.

För att det ska finnas sådana (x,y,z) måste

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2-2x-y \geq 0$:



$2-2x-y=0 \Leftrightarrow y=2-2x$

$$E=\{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x,\ 0 \leq z \leq 2-2x-y\}$$

Då blir $\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} z\,dz\,dy\,dx =$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2-2x-y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{(2-2x-y)^2}{2}\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{(2-2x-y)^3}{3\cdot(-1)}\right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (2-2x)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(2-2x)^4}{4\cdot(-2)}\right]_0^1 = \frac{2^4}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{3}.$$

Cylindriska koordinater och trippelintegraler 15.7

Cylindriska koordinater (r,θ,z) på $\mathbb{R}^3$ får man genom att byta koordinaterna (x,y) mot polära koordinater (r,θ):

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Om $E = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ e(x,y)\le z\le f(x,y)\}$ där $D\subseteq\mathbb{R}^2$ är en polär rektangel, $a\le r\le b$, $\alpha\le\theta\le\beta$ följer från formlerna för upprepad integration av trippelintegraler och för integration i polära koordinater för dubbelintegraler att

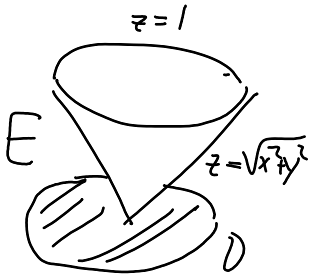
$$\iiint_E g(x,y,z)\,dV = \int_a^b\int_\alpha^\beta\int_{e(r\cos\theta,\,r\sin\theta)}^{f(r\cos\theta,\,r\sin\theta)} g(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,d\theta\,dr$$

Ex Beräkna $\iiint_E z\,dV$, där E är området mellan konen $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$ och planet $z=1$.

Såg förra veckan att om $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ är $E=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$

D ges i polära koord. av

$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$



och $\sqrt{x^2+y^2} = r$, så E blir i cylindriska koord.

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \leq z \leq 1.$$

Får att $\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 z\,r\,dz\,d\theta\,dr =$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=r}^{z=1} d\theta\,dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^3\,d\theta\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\,2\pi \int_0^1 r - r^3\,dr = \pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Trippelintegraler och massa m.m.

Om $E \subseteq \mathbb{R}^2$ är dess volym $\iiint_E 1\, dV$,

och om E representerar en kropp med densitet $\rho(x,y,z)$ så har E

$$\underline{\text{massa}} \quad m = \iiint_E \rho(x,y,z)\, dV$$

och $\underline{\text{masscentrum}}$ $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$

där $M_x = \iiint_E x\rho(x,y,z)\, dV$ osv.

Ex Om tar konen ovan, med $\rho(x,y,z)=1$, så såg vi förra veckan att $m = \pi/3$, och ovan att $M_z = \pi/4$.
Av symmetriskäl är $\bar{x} = 0 = \bar{y}$, så

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0, 0, \frac{\pi/4}{\pi/3}\right) = \left(0, 0, \frac{3}{4}\right).$$