Sammanfattning Föreläsning 14

Trippelintegraler

$$\iiint_E f(x,y,z)dV$$

Beräknas typiskt som upprepade integraler.

Om t.ex. $E = \left\{ \begin{matrix} (x,y,z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), \\ e(x,y) \leq z \leq f(x,y) \end{matrix} \right\}$ är

$$\iiint_E g(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)dz\,dy\,dx\,.$$

Cylindriska koordinater

Byter koordinaterna (x,y)
mot polära koordinater (r,θ):

Om $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ges i polära koordinater av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$ är

$$\iiint_E g(x,y,z)dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r\cos\theta,\, r\sin\theta)}^{f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)} g(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)\; r\; dz\,d\theta dr$$

Sfäriska koordinater och trippelintegraler 15.8

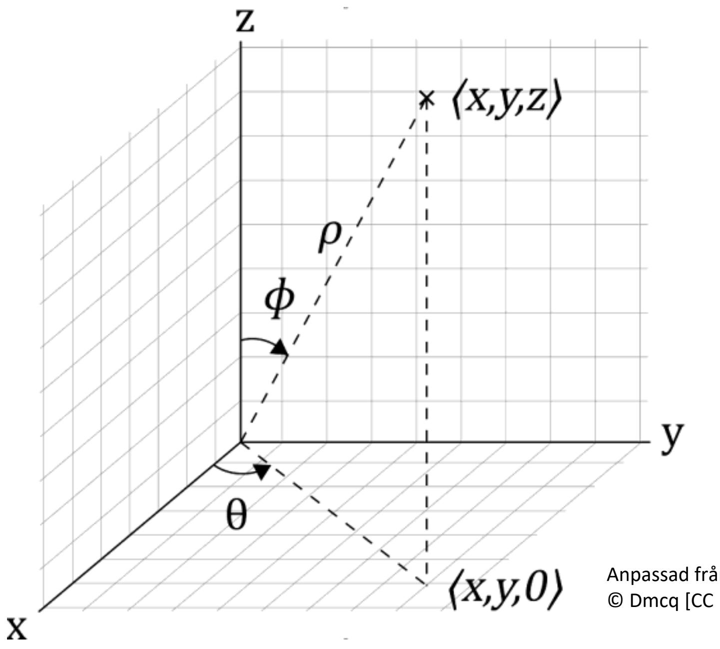
En punkt (x,y) i planet kan beskrivas i polära koordinater med dess avstånd $r=\sqrt{x^2+y^2}$ till origo och en vinkel θ, dvs vinkeln mellan (x,y) och pos. z-axeln.

En punkt (x,y,z) i rummet kan beskrivas med dess avstånd $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ till origo och två vinklar, t.ex:

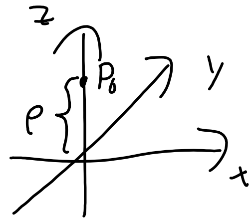
θ: vinkeln i xy-planet mellan (x,y) och pos. x-axeln.
ϕ: vinkeln mellan (x,y,z) och pos. z-axeln.

(ρ,θ,ϕ) kallas <u>sfäriska koordinater</u> och ges av

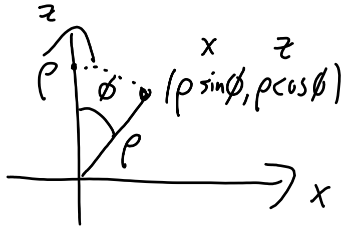
$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho\geq 0 \\ 0\leq\phi\leq\pi \\ \left(\text{oftast } 0\leq\theta\leq 2\pi \text{ el } -\pi\leq\theta\leq\pi\right) \end{array}$$



Härledning av sfäriska koordinater:



1) Börjar med $P_0 = (0,0,\rho)$ $\quad \rho$ rätt, $\phi = 0$ (θ odef.)

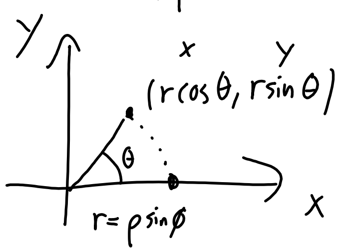


2) Roterar i zx-planet: $P_1 = (\rho\sin\phi, 0, \rho\cos\phi)$

ρ, ϕ rätt, $\theta = 0$.

3) Roterar i xy-planet: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$

ρ, ϕ, θ rätt.



Formel för integration i sfäriska koordinater:

Om E "sfärisk låda":

$a \le \rho \le b, \quad \alpha \le \theta \le \beta, \quad c \le \phi \le d$ är

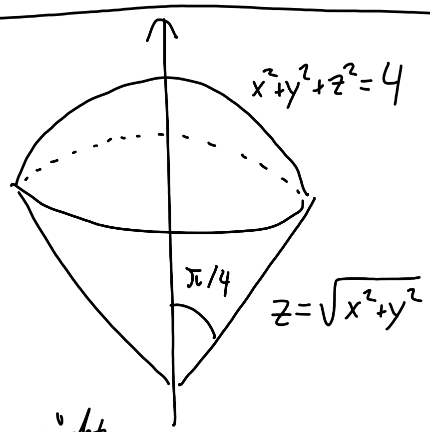
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_a^b \int_c^d f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta.$$

Kort: $\boxed{dV = \rho^2 \sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta}$ (formelblad)

Kort om idé varför s. 1047

(bygger på vad är volymen av liten "sfärisk låda")

Ex Beräkna $\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2\,dV$, där E är området ovanför konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ och innanför sfären $x^2+y^2+z^2=4$.



Konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ har vinkel $\pi/4$ mot positiva z-axeln.

Området ovanför ges då av $0\le\phi\le\pi/4$.

Sfären $x^2+y^2+z^2=4$ ges av $\rho=2$ så området innanför ges av $0\le\rho\le 2$.

Inga restriktioner i θ, så E ges i sfäriska koord. av

$$0\le\rho\le 2,\quad 0\le\phi\le\pi/4,\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

$$\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2\,dV = \int_0^2\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} (\rho^2)^2\rho^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi\,d\rho =$$

$(\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

$$=2\pi\int_0^2\int_0^{\pi/4}\rho^6\sin\phi\,d\phi\,d\rho = 2\pi\int_0^2 \rho^6\Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi/4}d\rho =$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\int_0^2\rho^6\,d\rho = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^2 =$$

$$=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2^7/7 = 256\pi\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Kapitel 16 Vektoranalys

Vektorfält 16.1

Har hittills studerat funktioner

a) från $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}$ (envar och kap 14-15)

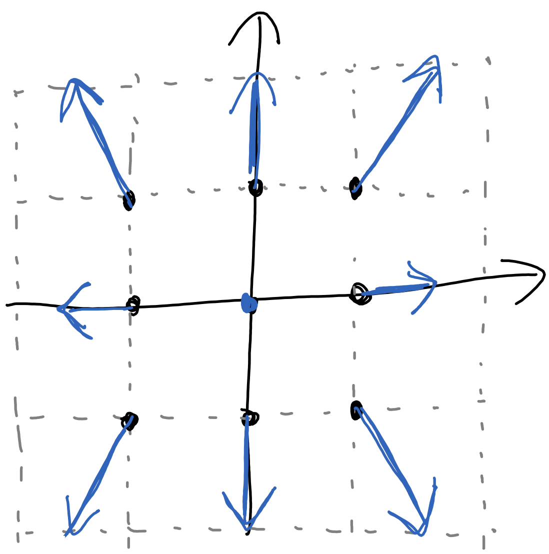
b) från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$ el. $\mathbb{R}^3$ (kap. 13).

Naturligt också studera:

Def Ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en funktion $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^2$, dvs för varje $(x,y) \in D$ ger det en vektor $\mathbb{F}(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Definierar vektorfält på $\mathbb{R}^3$ på motsvarande sätt.

Ex Skissa vektorfältet $\mathbb{F}(x,y) = (\frac{1}{2}x, y)$ genom att rita ut det i några jämnt placerade punkter.



Vektorfält används för att beskriva fysiska fenomen. T.ex:

a) Ett <u>hastighetsfält</u> $\mathbf{v}$ är ett vektorfält där $\mathbf{v}(x,y)$ representerar hastigheten i (x,y) av något som rör sig med varierande hastighet, t.ex. en gas eller vätska.

b) Ett <u>kraftfält</u> $\mathbb{F}$ är ett vektorfält där $\mathbb{F}(x,y)$ representerar en kraft på en partikel med position (x,y), t.ex. ett gravitationsfält eller ett elektriskt fält.

(Dessa två exempel kommer motivera olika matematiska begrepp framöver)

Viktigt matematiskt exempel:

<u>Def</u> Om $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ så är dess <u>gradientfält</u>

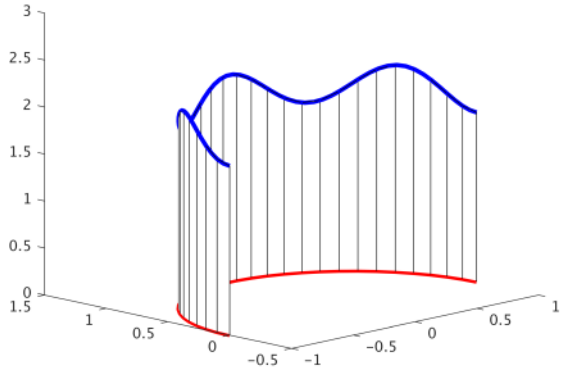
$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle \qquad (x,y) \in D$$

Kurvintegraler av funktioner 16.2

$\int_a^b f(x)dx =$ *"arean under grafen $y = f(x)$ när $a \leq x \leq b$"*

Vill definiera
kurvintegral av en funktion $f(x,y)$ längs en kurva C

$\int_C f(x,y)ds$ som



"arean under grafen $z = f(x,y)$ när (x,y) går längs C"

(Intressant i sig, men också för att nästa gång definiera integraler av vektorfält längs kurvor)

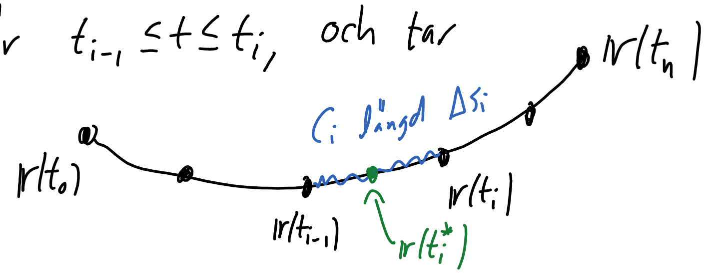
C kurva med parametrisering $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$.

$f(x,y)$ funktion definierad på C.

Vill def. integral av f längs C, gör som tidigare m.h.a. Riemann summor.

Antar $\mathbf{r}$ glatt (smooth), dvs. $\mathbf{r}'(t)$ existerar och är kont.

Delar in C i n st. delar $C_1, \ldots, C_n$, där C_i delen av C av längd Δs_i där $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, och tar $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$.



Def <u>Kurvintegralen av f längs C</u> definieras som

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_i^*))\,\Delta s_i$$

om gränsvärdet existerar.

När $f(x,y)=1$ blir $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$ längden l av C.

och såg tidigare att $l = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

Liknande härledning ger:

<u>Formel för kurvintegral av f</u> om f kontinuerlig:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$