Sammanfattning Föreläsning 14

Trippelintegraler $\iiint_E f(x, y, z)dV$

Beräknas typiskt som upprepade integraler.

Om t.ex. $E = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), \\ e(x, y) \leq z \leq f(x, y) \end{array} \right\}$ är

$$\iiint_E g(x, y, z)dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x, y, z)\, dz\, dy\, dx\,.$$

Cylindriska koordinater

Byter koordinaterna (x, y) mot polära koordinater (r, θ):

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Om $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ges i polära koordinater av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$ är

$$\iiint_E g(x, y, z)dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{f(r\cos\theta, r\sin\theta)} g(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)\, {\color{red}r}\, dz\, d\theta dr$$

Sfäriska koordinater

$\rho =$ avståndet till origo

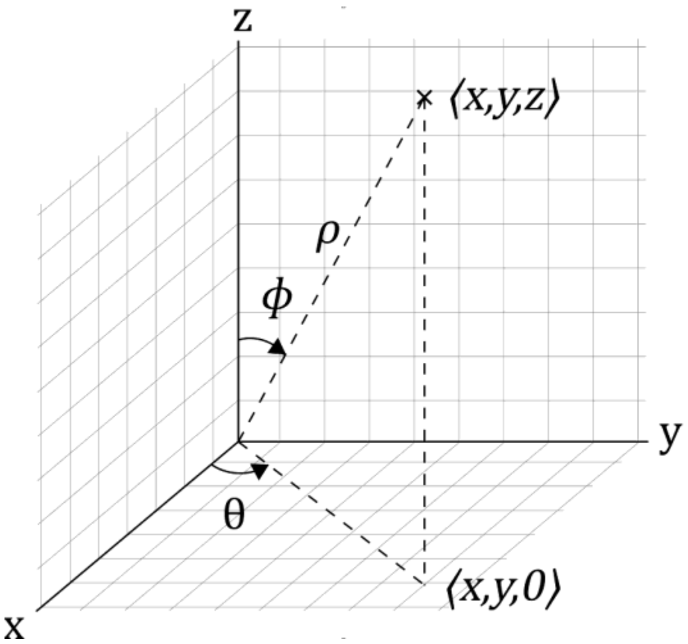
$(\rho \geq 0)$

$\theta =$ vinkeln mellan $\langle x, y, 0\rangle$ och positiva x-axeln

(oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

$\phi =$ vinkeln mellan $\langle x, y, z\rangle$ och positiva z-axeln

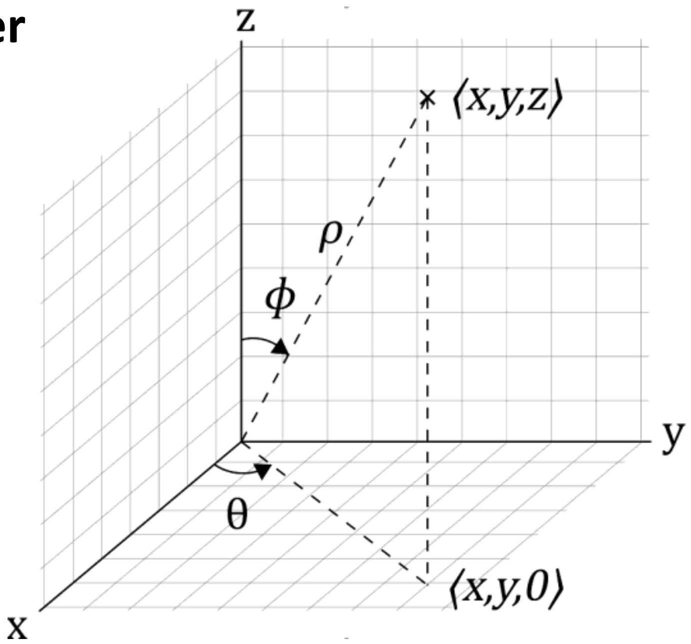
$(0 \leq \phi \leq \pi)$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"

Formel för sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"

$\int_a^b f(x)dx =$ *"arean under grafen* $y = f(x)$ *när* $a \leq x \leq b$"

Vill definiera

kurvintegral av en funktion $f(x,y)$ längs en kurva C

$\int_C f(x,y)ds$ som

"arean under grafen $z = f(x,y)$

när (x,y) *går längs* C"