Sammanfattning Föreläsning 15

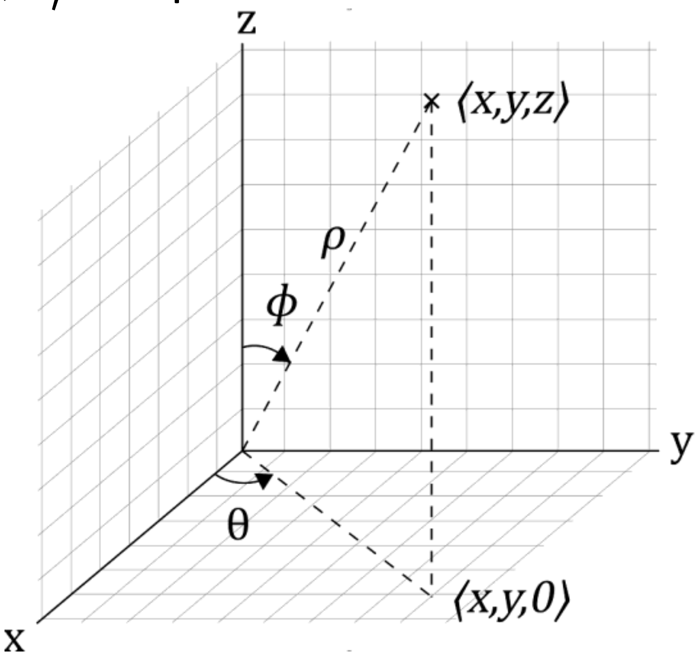
Sfäriska koordinater

$\rho =$ avståndet till origo ($\rho \geq 0$)

$\theta =$ vinkeln mellan $\langle x, y, 0\rangle$ och positiva x-axeln
(oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

$\phi =$ vinkeln mellan $\langle x, y, z\rangle$ och positiva z-axeln
($0 \leq \phi \leq \pi$)

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Integration i sfäriska koordinater

E *"sfärisk låda"*: $a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d$

$$\iiint_E g(x, y, z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta g(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi)\ \rho^2 \sin\phi \ \ d\theta d\phi d\rho$$

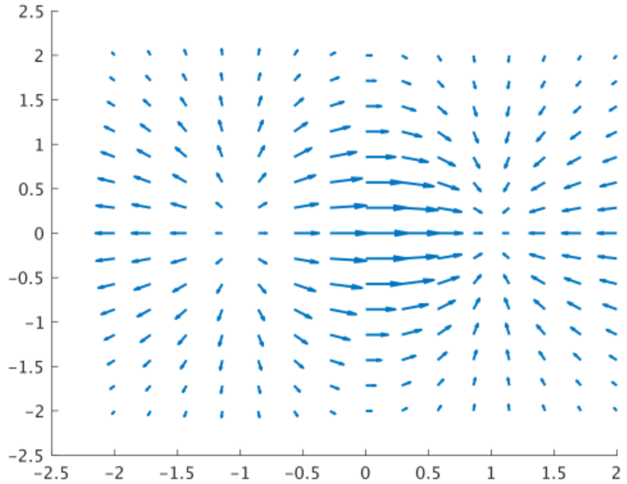
Kortare: $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\theta d\phi d\rho$

Vektorfält

Funktioner $\mathbf{F}$ från $D \subseteq \mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

För varje $(x, y) \in D$ får man en vektor $\mathbf{F}(x, y) \in \mathbb{R}^2$

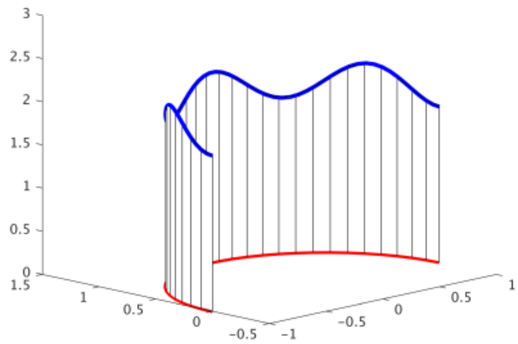
(eller motsvarande i $\mathbb{R}^3$)



Kurvintegral av en funktion $f(x, y)$ längs en kurva C

$$\int_C f(x, y)ds =$$

"arean under grafen $z = f(x, y)$
när (x, y) *går längs* C*"*



Definieras mha Riemannsumma.

Om C ges av $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$ är

$$\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Kurvintegraler av funktioner (forts.)

Från förra föreläsningen: Formel för kurvintegral av funktion f längs kurva C par. av $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

---

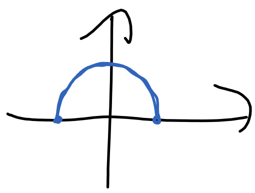
ds kallas längdelement, och formeln ovan förkortas ofta:

$$\boxed{ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt} \quad \text{(formelblad)}$$

Anm Definitionen och formeln för kurvintegralen är i termer av en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av en kurva C.
Men i själva verket beror den inte på parametriseringen utan bara på C, dvs. punkterna $\{\mathbf{r}(t) \mid a \le t \le b\}$. Man kan därför välja vilken parametrisering man vill.

Ex Övre halvan av enhetscirkeln kan t.ex. parametriseras med

a) $\mathbf{r}_1(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$, $\quad 0 \le t \le \pi$.



b) $\mathbf{r}_2(t) = \langle t, \sqrt{1-t^2} \rangle$, $\quad -1 \le t \le 1$.

(Obs: Går åt olika håll, spelar ingen roll här, men kommer göra skillnad när integrerar vektorfält idag)

På liknande sätt som tidigare kan man härleda:

Om en tunn tråd med densitet $\rho(x,y)$ går längs C är dess

massa $\quad m = \int_C \rho(x,y)\,ds$

masscentrum: $\quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$ där

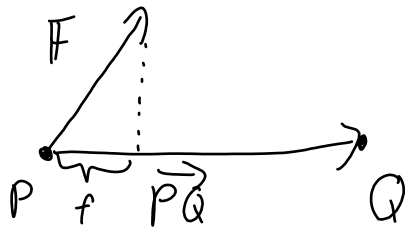
$M_x = \int_C x\rho(x,y)\,ds$ och $M_y = \int_C y\rho(x,y)\,ds$.

Kurvintegraler av vektorfält 16.2

(Motiveras av arbete i fysik)

I en variabel: arbetet utfört av en konstant kraft F på en partikel som förflyttar sig sträckan d är $F \cdot d$. (kan vara pos. eller neg.)

I flera variabler, om har kraft $\mathbb{F}$ som verkar på partikel som förflyttas från P till Q blir arbetet $\mathbb{F} \bullet \overrightarrow{PQ}$



$$\text{arbete} = f \cdot |\overrightarrow{PQ}| = \mathbb{F} \bullet \overrightarrow{PQ}$$

se s. 811.

(Arbetet beror bara på delen av $\mathbb{F}$ som pekar i riktningen av $\overrightarrow{PQ}$)

Antar nu har kurva C par. av $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, $\mathbf{r}$ glatt.

Om har kraftfält $\mathbb{F}(x)$ som varierar, vill att kurvintegralen av $\mathbb{F}$ längs C ger arbetet som $\mathbb{F}$ utför på en partikel som rör sig längs C.

Kan härleda m.h.a. Riemannsummor att arbetet ges av

$$W = \int_b^a \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt$$

se s. 1082.

<u>Definition av kurvintegral av vektorfält $\mathbb{F}$</u> längs kurva C

parametriserad av $\mathbf{r}(t)$:

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt.$$

Kort: $\boxed{d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)\,dt}$ (formelblad)

<u>Ex</u> Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = \langle 0, -2y\rangle$ om en partikel rör sig längs kurvan C som ges av $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t\rangle$, $0 \le t \le \pi/2$

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbb{F}(\cos t, \sin t) = \langle 0, -2\sin t\rangle$$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t\rangle$$

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t) = 0\cdot(-\sin t) - 2\sin t\cos t = -\sin(2t)$$

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (-\sin(2t))\,dt = \left[\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\cos(\pi) - \cos(0)}{2} = -1.$$

Huvudsatsen för kurvintegraler 16.3

Enkelt integrera gradientfält:

Sats Antag C kurva som ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ och $f(x,y)$ s.a. ∇f kont. längs C.

Då är $\displaystyle\int_C \nabla f \bullet d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$.

Om $\mathbf{r}(t) = \langle t, 0 \rangle$ och f bara beror på x blir detta integralkalkylens huvudsats:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Satsen i allmänhet följer av detta och kedjeregeln, se s. 1088.

Def Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är <u>konservativt</u> om $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon funktion f.

f kallas då <u>potential</u> till $\mathbf{F}$.

Ex Bevarande av mekanisk energi

Antag att en partikel rör sig längs $\mathbb{r}(t)$, $a \le t \le b$ genom ett kraftfält $\mathbb{F}$ enl. Newtons andra lag. Om K är <u>rörelseenergin</u> och W arbetet är

$$W = K(\mathbb{r}(b)) - K(\mathbb{r}(a)),$$

se s. 1093.

Om $\mathbb{F}$ är konservativt, vilket gravitationsfält typiskt är (se s. 1073) och P är den <u>potentiella energin</u> så är $-P$ en potential till $\mathbb{F}$, dvs $\mathbb{F} = \nabla(-P)$.

Enligt huvudsatsen blir då

$$W = -P(\mathbb{r}(b)) - (-P(\mathbb{r}(a))).$$

Kombinerar man dessa ekvationer får man att

$$K(\mathbb{r}(a)) + P(\mathbb{r}(a)) = K(\mathbb{r}(b)) + P(\mathbb{r}(b)),$$

dvs den <u>totala mekaniska energin</u> $K+P$ bevaras i konservativa kraftfält.

Konservativa vektorfält enkla att integrera.

Hur avgöra om ett vektorfält är konservativt?

Om $\mathbb{F} = (P, Q) = \nabla f = (f_x, f_y)$ och
f kont. partiella andraderivator är

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(Clairauts sats)

Så måste ha $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ om konservativt.

Skall se att faktiskt medför att konservativt (ibland).
Behöver först:

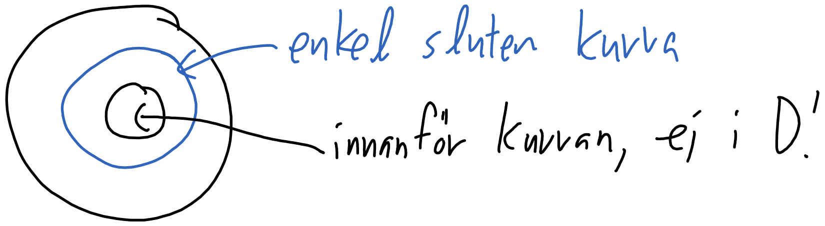
<u>Def</u> En <u>enkel sluten</u> (simple closed) kurva börjar och slutar i samma punkt (sluten) och korsar aldrig sig själv (enkel).

<u>Def</u> En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är <u>enkelt sammanhängande</u> om den "inte innehåller några hål".

Mer precist: För varje enkel sluten kurva C i D så ligger alla punkter innanför C också i D.

Ex a) $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ enkelt sammanhängande.

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ inte enkelt sammanhängande.



Sats Om $\mathbb{F} = \langle P, Q \rangle$ vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D enkelt sammanhängande och $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ på D,

då är $\mathbb{F}$ konservativt.