Sammanfattning Föreläsning 16

- Om en tunn tråd går längs en kurva C med densitet $\rho(x, y)$, är dess
  - **massa** $m = \int_C \rho(x,y) ds$
  - **masscentrum** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right)$ där

$$M_x = \int_C x\, \rho(x,y) ds \text{ och } M_y = \int_C y\, \rho(x,y) ds$$

- **Kurvintegral av vektorfält $\mathbf{F}$ längs kurva C**
  som ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathrm{t})) \cdot \mathbf{r}'(\mathrm{t})\, dt$$

(Kort: $\mathrm{d}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)\, dt$)

Om $\mathbf{F}$ kraftfält ger kurvintegralen *arbetet* som kraftfältet utför på en partikel som rör sig längs C.

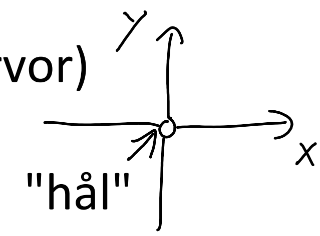
- **Huvudsatsen för kurvintegraler:** Om C ges av $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$ så är
$$\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(\mathrm{b})\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big)$$

- Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är **konservativt** om $\mathbf{F} = \nabla f$, dvs det är gradienten av en funktion f, och f kallas då **potential** till $\mathbf{F}$.

- Om $\mathbf{F} = \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ är konservativt så är
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- En kurva C är **enkel och sluten** om den börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv

- Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är **enkelt sammanhängande** om den *"inte innehåller några hål".*
(Mer precist uttryckt m.h.a. enkla slutna kurvor)



  Exempel:
  $\mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande
  $\mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$ ej enkelt sammanhängande

- **Sats** Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ är ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är enkelt sammanhängande och
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
så är $\mathbf{F}$ konservativt på D, dvs $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon funktion f.

  (Tidigare, såg att ekvationen *måste* vara uppfylld för att skall vara konservativt, denna satsen säger att det *räcker)*

Konservativa vektorfält 16.3

Obs: Att $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \langle P, Q \rangle$ konservativt gäller inte på områden som inte är enkelt sammanhängande, som t.ex. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
se t.ex. övning 16.3.35.

Metod för att hitta potential om existerar:

Vill lösa $\begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$

a) Tar först en lösning till (i), dvs en primitiv funktion f_0 till P m.a.p. x. Allmänna lösn. till (i) är då

$$f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) \quad (*) \quad (g(y) \text{ oberoende av } x)$$

(Kvar att bestämma g. Gör det m.h.a. (ii))

b) Sätter in (*) i (ii) för att bestämma g:

$$Q \underset{(ii)}{=} f_y \underset{(*)}{=} (f_0)_y + g'(y)$$

$\Rightarrow g(y)$ primitiv funktion till $Q - (f_0)_y$ m.a.p. y.

[Obs! Måste få att $Q - (f_0)_y$ bara beror på y, annars något fel.]

$\underline{\text{Ex}}$ Avgör vilka av vektorfälten $\mathbb{F} = (2x+y,\ x-2y)$

och $\mathbb{G} = (2x-y,\ x-2y)$ som är konservativa, och

bestäm potential till de som är konservativa.

$\mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande, så om (P, Q) def. på $\mathbb{R}^2$ är

det konservativt precis om $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\mathbb{F} = (P, Q)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+y) = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x-2y) = 1$

lika, så $\mathbb{F}$ $\underline{\text{är}}$ konservativt.

$\mathbb{G} = (R, S)$, $\frac{\partial R}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial S}{\partial x} = 1$, olika, så $\mathbb{G}$ $\underline{\text{ej}}$ konservativt.

Potential till $\mathbb{F}$: a) En primitiv funktion till P m.a.p. x:

$$f_0 = \int 2x+y\,dx = x^2 + xy.$$

Allmän lösning till (i): $f(x,y) \underset{(*)}{=} x^2 + xy + g(y)$.

b)
$$x - 2y \underset{(ii)}{=} f_y \underset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + xy + g(y)\right) = x + g'(y).$$

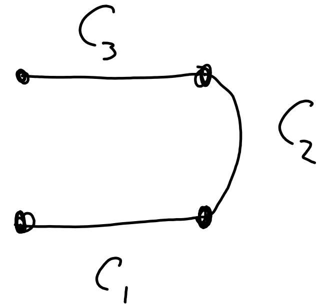
$$\Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + C$$

$$\Rightarrow f = f_0 + g = x^2 + xy - y^2 + C \text{ potential till } \mathbb{F}.$$

Greens formel 16.4

Förberedelser:

1) Kommer anta C styckvis glatt, dvs. C kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \dots, C_m$, där C_i slutar där C_{i+1} börjar



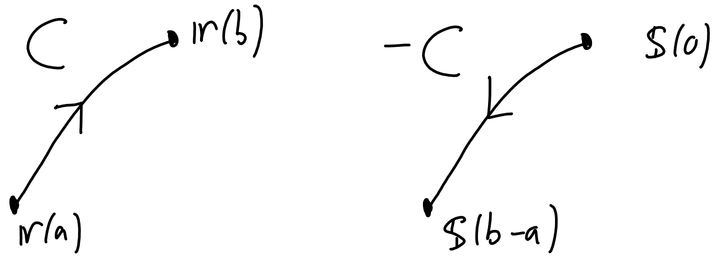
Då definierar man $\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \dots + \int_{C_m} f\,ds$

och $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{C_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} + \dots + \int_{C_m} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$.

2) Kurvintegralen av ett vektorfält längs en kurva C som parametriseras av $\mathbb{r}(t)$, $a \le b \le t$, beror på kurvan sedd som en orienterad kurva, vilken består av dess punkter $\{\mathbb{r}(t) \mid a \le t \le b\}$ och en riktning.

Kurvan $-C$ består av samma punkter, men går i motsatt riktning, och kan t.ex. parametriseras med

$$\mathbb{s}(t) = \mathbb{r}(b-t), \quad 0 \le t \le b-a.$$



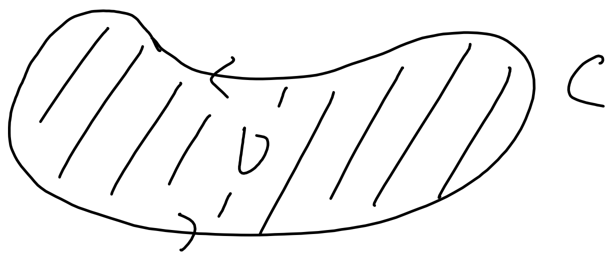
Från def. av kurvintegral av vektorfält följer att

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$ (rimligt från tolkningen som arbete)

(Däremot: $\int_C f\,ds = \int_{-C} f\,ds$ (samma tecken!))

3) Låt C vara en enkel sluten kurva (som alltså börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv.)

Då begränsar C ett område D, dvs. C är randen till D.



C är positivt orienterad om den går moturs kring D, dvs D ligger till vänster om man följer C i positiv riktning.

Annars är C negativt orienterad och då är $-C$ positivt orienterad.

<u>Notation:</u> Låt C ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$.

Låt $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$. Då skrivs

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_a^b P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\,dt$$

också som

$$\int_C P\,dx + Q\,dy, \quad \text{dvs.} \quad \boxed{dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt}$$

<u>Greens formel/sats</u> Om C enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D och P, Q har kontinuerliga partiella derivator är

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad \text{(formelblad)}$$

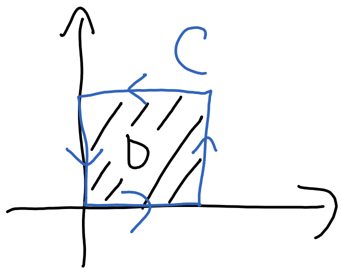
Liknande form som integralkalkylens huvudsats: $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$:

Integral av derivata på område kan uttryckas m.h.a. värden på randen. Beviset av Greens formel när D är ett typ I och typ II-område följer relativt enkelt från integralkalkylens huvudsats och formeln för upprepad integration, se s. 1097.

Ex Beräkna $\int_C (yx^2 - e^{x^2})dx + (e^{y^3} + x^3)dy$,

där C är den positivt orienterade randen till $D = [0,1] \times [0,1]$.

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dA$$



$$= \iint_D 3x^2 - x^2 \, dA = \int_0^1 \int_0^1 2x^2 \, dy \, dx = \int_0^1 2x^2 \, dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Kan som ovan beräkna kurvintegraler som dubbelintegraler. Ibland användbart göra tvärtom:

Greens formel och areor:

Om tar $\langle P, Q \rangle$ som $\langle -y, 0 \rangle$, $\langle 0, x \rangle$ eller $\langle \frac{-y}{2}, \frac{x}{2} \rangle$ blir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \qquad \text{så}$$

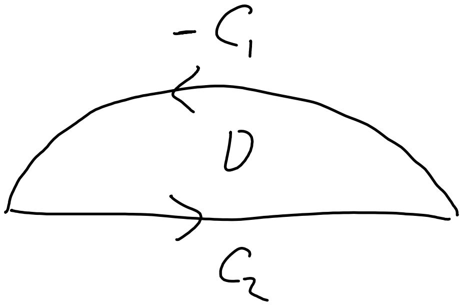
$$\boxed{\operatorname{area}(D) = \iint_D 1 \, dA = \int_C x \, dy = \int_C -y \, dx = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy}$$

Ex Beräkna arean av området under kurvan

$\langle t - \sin t, 1 - \cos t \rangle$ för $0 \le t \le 2\pi$.

(Gick inte igenom dessa räkningar på föreläsningen)

Området begränsas av C enligt figur:



C_1: $\mathbf{r}_1(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t \rangle$

C_2: $\mathbf{r}_2(t) = \langle t, 0 \rangle$

$0 \le t \le 2\pi$.

Arean ges då av

$$A = -\int_C y\,dx = -\int_{-C_1} y\,dx - \int_{C_2} y\,dx = \int_{C_1} y\,dx - \int_{C_2} y\,dx =$$

$$A = -\int_C y\,dx = -\int_{-C_1} y\,dx - \int_{C_2} y\,dx = \int_{C_1} y\,dx - \int_{C_2} y\,dx.$$

$$\int_{C_1} y\,dx = \int_0^{2\pi} y(t)\,x'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(1-\cos t)^2}_{=1-2\cos t+\cos^2 t}\,dt = \left\{ \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + 2\cos t + \cos 2t\,dt = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$$

(integral av cost & cos2t över en period 2π är 0)

$$\int_{C_2} y\,dx = 0 \quad \text{för } y = 0 \text{ på } C_2.$$

Alltså: $A = 3\pi$.