Sammanfattning Föreläsning 17

Metod för att hitta potential f till konservativt vektorfält $F = \langle P, Q\rangle$: Vill lösa $\begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$

1. Tar först en lösning f_0 till (i), $f_0 = \int P\, dx$. Allmänna lösningen till (i) är då $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) \quad (*)$.
2. Sätter in lösningen från $(*)$ i (ii) för att bestämma g:
$Q \underset{(ii)}{=} f_y \underset{(*)}{=} (f_0)_y + g'(y) \Rightarrow \quad g(y) = \int Q - (f_0)_y\, dy.$

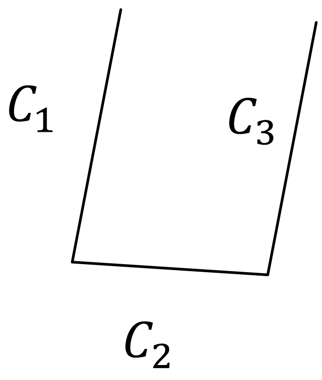
En kurva C är **styckvis glatt** om den kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \dots, C_m$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

Då definierar man

$$\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \cdots + \int_{C_m} f\, ds$$

och

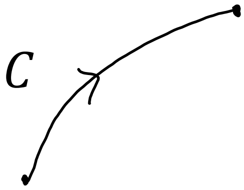
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

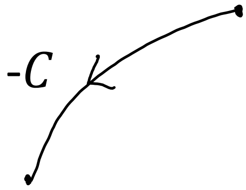


För integraler av vektorfält längs C ser man C som en *orienterad kurva,* dvs. den består av punkter och en riktning.

Man definierar kurvan $-C$ som kurvan som består av samma punkter men går i motsatt riktning.

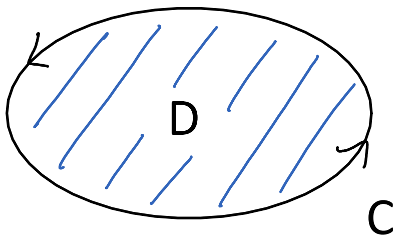
$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$





En enkel sluten kurva C (*som börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv)* **begränsar** ett område D, dvs. C är randen till D.

C är **positivt orienterad** om den går moturs kring D (D på vänster sida om man följer C i positiv riktning), annars är den **negativt orienterad.**



Notation

C kurva, parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big),\ a \le t \le b$

$\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$ vektorfält

Då betecknar man

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\,dt$$

också med

$\int_C P\,dx + Q\,dy$

(dvs $dx = x'(t)\,dt$ och $dy = y'(t)\,dt$)

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D. Då är

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Användbart specialfall:

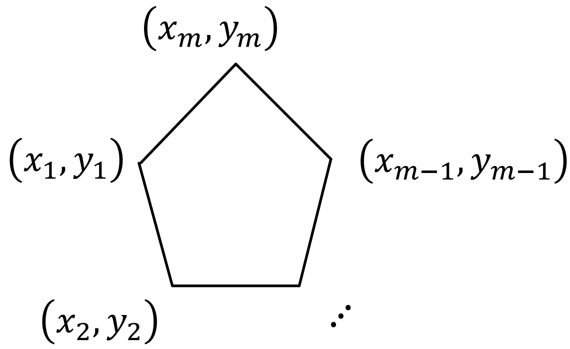
$$\text{area}(D) = \int_C -y\,dx = \int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

Exempel på användningar av Green's formel:

a) Planimeter: verktyg som mäter area av områden
b) Bevisa satsen om konservativa vektorfält på enkelt sammanhängande områden (s. 1101)
c) Formel för area av polygon (nedan)

Exempel En <u>polygon</u> är ett område i planet som begränsas av ett antal räta linjer som inte skär varandra.

Om polygonen har hörn i $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$, uppräknade moturs, så ger formeln $A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$ att polygonens area är



$$\frac{1}{2}\big((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{m-1}y_m - x_my_{m-1}) + (x_my_1 - x_1y_m)\big)$$

(se övning 16.4.21)

Parametriserade ytor 16.6

En kurva C är endimensionell, beskrivs med en parameter: $\mathbf{r}(t)$.

Def En parametriserad yta S är alla punkter $\{\mathbf{r}(u,v) \mid (u,v) \in D\}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$ är en vektorvärd funktion.

En yta är tvådimensionell, dvs beskrivs m.h.a. två parametrar.

Skrivs ofta i komponenter: $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Ex a) En sfär med radie 2 och centrum i origo ges av

$$\mathbf{r}(u,v) = \langle 2\sin u \cos v,\ 2\sin u \sin v,\ 2\cos u \rangle,$$

$$(u,v) \in D = [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

(sfäriska koord., $\phi = u$, $\theta = v$, $\rho = 2$)

b) Om $f(x,y)$ reellvärd funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är grafen till f en parametriserad yta:

$$\mathbf{r}(u,v) = \langle u, v, f(u,v) \rangle, \quad (u,v) \in D.$$

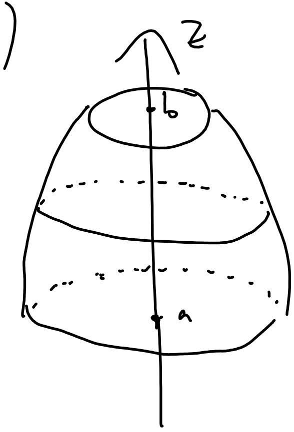
(skriver ofta $\mathbf{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y) \rangle$ istället)

c) Om $g:[a,b]\to[0,\infty)$ ges rotationsytan kring z-axeln med radie $g(z)$ av

$$\mathbf{r}(u,v)=(g(u)\cos v,\ g(u)\sin v,\ u)$$
$$(u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi].$$

(cylindriska koord., $r=g(u)$, $\theta=v$, $z=u$)

$r=g(z)$



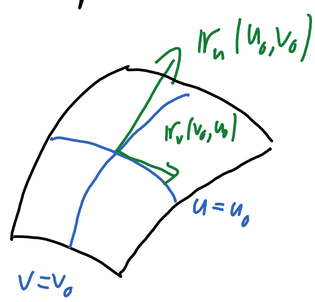
Tangentplan till parametriserade ytor 16.6

Låt S vara en yta som ges av $\mathbf{r}(u,v)$

Fixera $(a,b,c)=\mathbf{r}(u_0,v_0)$

- Bildar $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ och $\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ vektorer av partiella derivator.

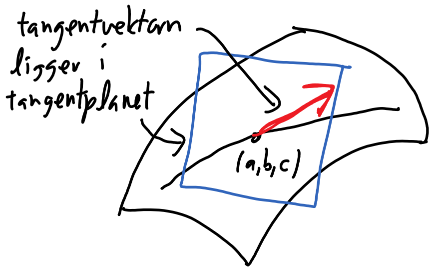
Kurvorna $\mathbf{r}_1(u)=\mathbf{r}(u,v_0)$ och $\mathbf{r}_2(v)=\mathbf{r}(u_0,v)$ ligger i S och dess tangentvektorer i u_0 resp. v_0 är de partiella derivatorna ovan.



Def S är glatt i $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ om

$\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{r}_v(u_0,v_0)\neq 0$ ($\Leftrightarrow$ de är ej parallella)

Def Om S är glatt i $\langle a,b,c\rangle = \mathbf{r}(u_0,v_0)$ är dess <u>tangentplan</u> det plan som går genom (a,b,c) och innehåller alla tangentvektorer till kurvor i S genom (a,b,c)



Formel: Tangentplanet har normalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ och om skriver $\mathbf{n} = \langle n_1,n_2,n_3\rangle$ så ges tangentplanet av

$$n_1(x-a)+n_2(y-b)+n_3(z-c)$$

Liknande härledning som för tangentplan av nivåyta, se kurshemsidan.

Om S är grafen $z=f(x,y)$ får man samma formel som tidigare för tangentplanet, för om

$$\mathbf{r}(x,y) = \langle x,y,f(x,y)\rangle \text{ blir}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle,$$

och $\mathbf{r}(a,b) = \langle a,b,f(a,b)\rangle$, så tangentplanet blir:

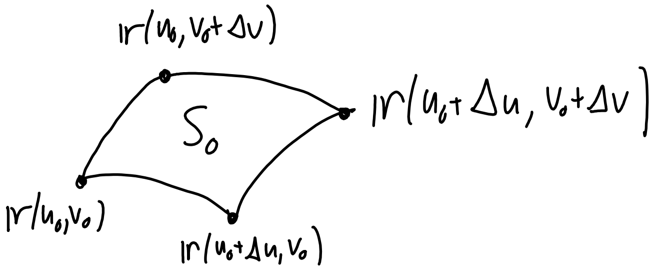
$$-f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b) + 1\cdot(z-f(a,b)) = 0$$

$$\iff \quad z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Area av parametriserade ytor 16.6

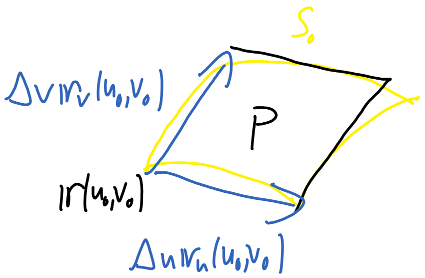
Antar S yta par. av $\mathbf{r}(u,v)$ genom $(a,b,c) = \mathbf{r}(u_0,v_0)$.

Tar rektangel $R = [u_0, u_0+\Delta u] \times [v_0, v_0+\Delta v]$, och låter S_0 vara delen av S när $(u,v) \in R$.



M.h.a. linearisering: $\mathbf{r}(u_0+\Delta u, v_0) \approx \mathbf{r}(u_0,v_0) + \Delta u\, \mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ osv,

får om $\Delta u, \Delta v$ små att S_0 nära följande parallellogram P:



Enligt egenskaper hos kryssprodukt är arean av P:

$$\left|(\Delta u)\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v(u_0,v_0))\right| = \left|\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)\right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

($\Delta u, \Delta v$ pos. tal)

M.h.a. Riemannsummor härleder man från detta:

Formel för area av yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA.$$

Ex Om S är grafen $\mathbf{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y)\rangle$ $(x,y)\in D$,

säg vi att $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$.

Eftersom $|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ ger detta formeln från förra

veckan: $$A = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA.$$

Ex Låt S vara rotationsytan

$$\mathbf{r}(u,v) = \langle g(u)\cos v, g(u)\sin v, u\rangle, \quad (u,v)\in D = [a,b]\times[0,2\pi].$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ g'(u)\cos v & g'(u)\sin v & 1 \\ -g(u)\sin v & g(u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \langle -g(u)\cos v, -g(u)\sin v, g'(u)g(u)\underbrace{(\cos^2 v+\sin^2 v)}_{=1}\rangle = g(u)\langle -\cos v, -\sin v, g'(u)\rangle.$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = g(u)\sqrt{1+g'(u)^2}$$

Arean blir då: $$A = \iint_D |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dA =$$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} g(u)\sqrt{1+g'(u)^2}\,dv\,du = 2\pi\int_a^b g(u)\sqrt{1+g'(u)^2}\,du$$

Denna formeln finns i avsn. 8.2, s. 552,

där den härleds på ett annat sätt.