Sammanfattning Föreläsning 17

Metod för att hitta potential f till konservativt vektorfält

$F = \langle P, Q\rangle$: Vill lösa $\begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$

1. Tar först en lösning f_0 till (i), $f_0 = \int P\,dx$. Allmänna lösningen till (i) är då $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) \quad (*)$.
2. Sätter in lösningen från $(*)$ i (ii) för att bestämma g: $Q \underset{(ii)}{=} f_y \underset{(*)}{=} \left(f_0\right)_y + g'(y) \Rightarrow \quad g(y) = \int Q - \left(f_0\right)_y\,dy$.

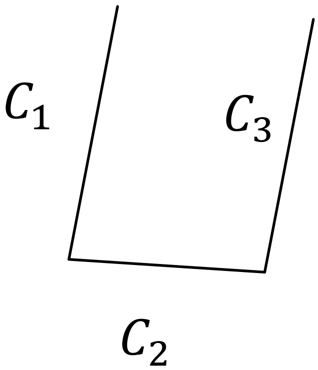
En kurva C är **styckvis glatt** om den kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \ldots, C_m$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

Då definierar man

$$\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \cdots + \int_{C_m} f\, ds$$

och

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

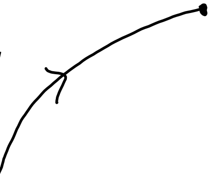


För integraler av vektorfält längs C ser man C som en *orienterad kurva,* dvs. den består av punkter och en riktning.

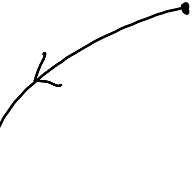
Man definierar kurvan $-C$ som kurvan som består av samma punkter men går i motsatt riktning.

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

C

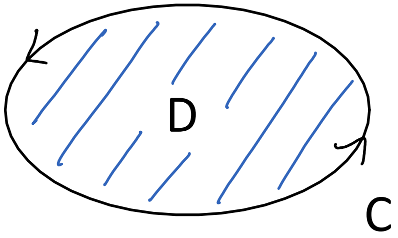


-C



En enkel sluten kurva C (*som börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv)* **begränsar** ett område D, dvs. C är randen till D.

C är **positivt orienterad** om den går moturs kring D (D på vänster sida om man följer C i positiv riktning), annars är den **negativt orienterad.**



Notation

C kurva, parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big),\ a \le t \le b$

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ vektorfält

Då betecknar man

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\, dt$$

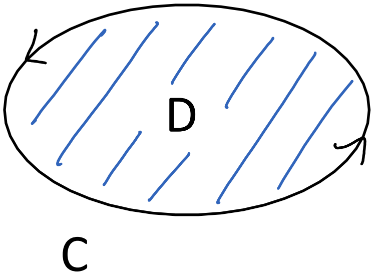
också med

$\int_C P\, dx + Q\, dy$

(dvs $dx = x'(t)\, dt$ och $dy = y'(t)\, dt$)

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D. Då är

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$



Användbart specialfall:

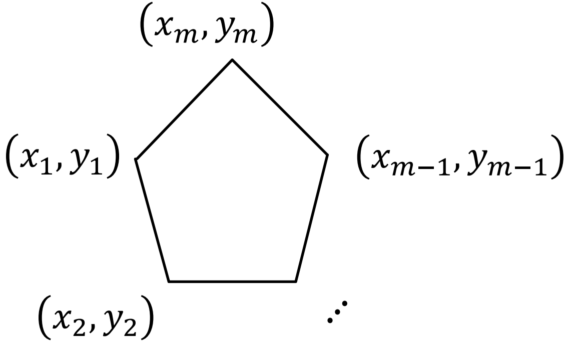
$$\text{area}(D) = \int_C -y\,dx = \int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

Exempel på användningar av Green's formel:

a) Planimeter: verktyg som mäter area av områden
b) Bevisa satsen om konservativa vektorfält på enkelt sammanhängande områden (s. 1101)
c) Formel för area av polygon (nästa slide)

Exempel En polygon är ett område i planet som begränsas av ett antal räta linjer som inte skär varandra.

Om polygonen har hörn i $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$, uppräknade moturs, så ger formeln $A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$ att polygonens area är



$$\frac{1}{2}\big((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{m-1}y_m - x_my_{m-1}) + (x_my_1 - x_1y_m)\big)$$

(se övning 16.4.21)