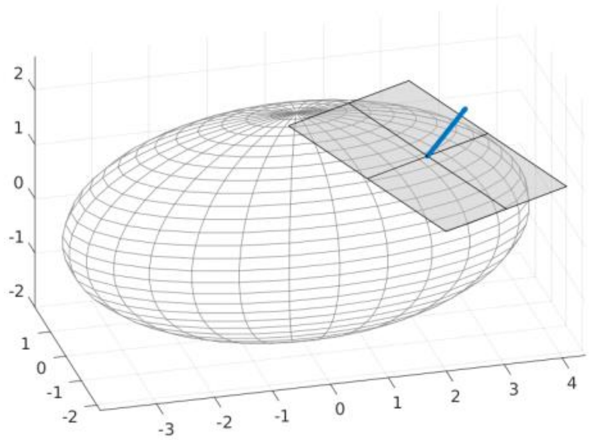
Sammanfattning Föreläsning 18

En **parametriserad yta** S ges av en vektorvärd funktion $\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.



Dess **tangentplan** i $\langle a, b, c\rangle = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ ges av

$$\mathbf{n} \cdot \langle x - a, y - b, z - c\rangle = 0,$$

där $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$.

Area av yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)|\, dA.$$

Om S är grafen $z = f(x, y), (x, y) \in D$ som kan parametriseras av $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, f(x, y)\rangle$ så är

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \langle -f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\rangle$$

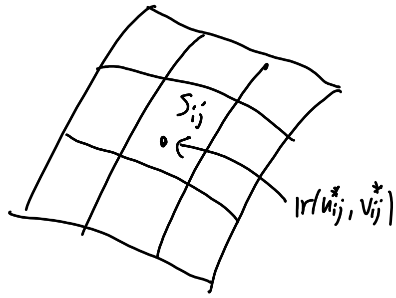
och arean blir

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA$$

Ytintegraler av funktioner 16.7

På liknande sätt som för kurvintegraler av funktioner definierar man ytintegraler av funktioner som gränsvärden av Riemannsummor

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*))\,\text{area}(S_{ij})$$



och med liknande härledning som för arean får man:

Formel för ytintegral av funktion f över yta S

parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)|\,dA.$$

Kort: $\boxed{dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA}$ (formelblad)

Om har yta S med densitet $\rho(x,y,z)$ är dess

<u>massa</u> $m = \iint_S \rho(x,y,z)\,dS$

<u>masscentrum</u> $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right)$,

där $M_x = \iint_S x\rho(x,y,z)\,dS$ osv.

Flödesintegraler 16.7

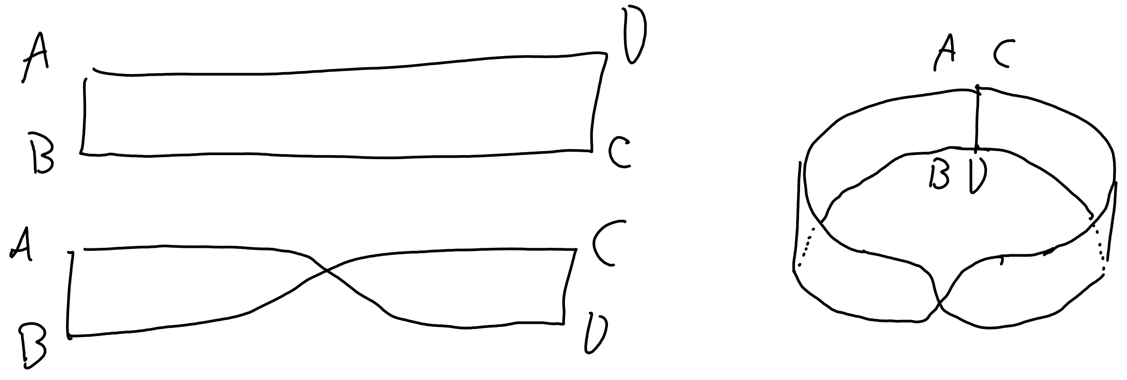
(Kurvintegraler av vektorfält fysiskt motiverade
kurvintegral av kraftfält = arbete)

Vill definiera ytintegral av vektorfält $\mathbb{F}$ över yta S s.a. ger flöde, dvs om S hastighetsfält för t.ex. en vätska är flödet volymen av vätska som passerar S (per tidsenhet).

(Behöver först följande begrepp)

Orientering av ytor

Möbiusbandet en speciell yta. Det fås genom att ta en remsa, vrida halvt varv, och klistra längs kanten.



Flödet beror på riktning som passerar ytan, behöver "fram/baksida"/"in/utsida". Går inte prata om på Möbiusbandet, för om startar på ena sidan och går ett varv runt så hamnar man på andra sidan.

<u>Påminnelse</u> Om S yta par. av $\mathbf{r}(u,v)$ så är

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)}{|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)|}$$

en enhetsnormalvektor till tangentplanet till S i $\mathbf{r}(u,v)$.

Tangentplanet har två enhetsnormalvektorer $\pm\mathbf{n}$ som pekar åt motsatta håll av S.

(På "bra" = orienterade ytor, kan välja en av dessa på ett kontinuerligt sätt.)

<u>Def</u> En yta S sägs vara <u>orienterad</u> om man i varje $(x,y,z) \in S$ kan välja en enhetsnormalvektor $\mathbf{n}(x,y,z)$ s.a. $\mathbf{n}$ varierar kontinuerligt. $\mathbf{n}$ kallas då en orientering av S.

<u>Ex</u> a) Möbiusbandet är <u>inte</u> en orienterad yta.

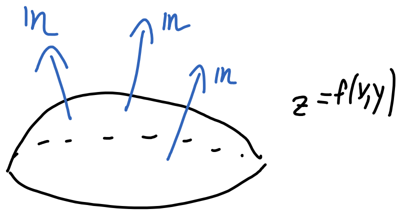
b) Om S glatt orienterad yta, parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$ så ger $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ en orientering av S

(Måste kräva att vet av annat skäl är orienterad. Möbiusbandet kan parametriseras, men skulle då ej få <u>välbestämd och kontinuerlig</u> tangentvektor)

Om S är grafen $z=f(x,y)$ kan den orienteras genom att ta orienteringen som pekar uppåt i z-riktning.

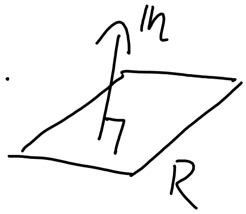
Om S par. med $\mathbf{r}(x,y)=\langle x,y,f(x,y)\rangle$ är den orienteringen

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \frac{\langle -f_x, -f_y, 1\rangle}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

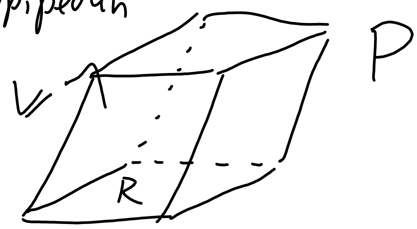


Flöde genom en yta

Antag R rektangel i $\mathbb{R}^3$ med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$.



Om en vätska rör sig med konstant hastighet $\mathbf{v}$ blir volymen av vätskan som strömmar genom R under en tidsenhet lika med volymen av parallellepipeden med bas R och "höjdvektor" $\mathbf{v}$ eftersom det som passerar R är precis det inuti P.



Räknar volymen med tecken, så är negativ om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{n}$ pekar mot olika sidor av R.

$$\text{Volym} = \text{höjd} \cdot \text{basarea} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \cdot \text{area}(R)$$

(höjd med tecken, se s. 811)

Om S orienterad yta med orientering $\mathbf{n}(x,y,z)$ och $\mathbf{v}(x,y,z)$ hastighetsfält härleder man genom att approximera S med rektanglar och genom Riemannsummor att flödet genom S bör vara
$$\iint_S \mathbf{v} \bullet \mathbf{n}\, dS.$$

Def Ytintegralen av ett vektorfält $\mathbb{F}$ över en yta S med orientering $\mathbf{n}$ är

$$\iint_S \mathbb{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_S \mathbb{F} \bullet \mathbf{n}\, dS$$

(HL är ytintegral av funktion)

Ytintegralen kallas också flödesintegral (flux integral) och dess värde kallas flödet av $\mathbb{F}$ genom S, eftersom den innebär det när $\mathbb{F}$ är ett hastighetsfält.

Alternativ formel S glatt orienterad yta,

parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$.

Påminnelse: a) $\iint_S f\, dS = \iint_D f\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$.

b) $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ ger en orientering av S.

Med den orienteringen blir:

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \underset{(a)\&(b)}{=} \iint_D \mathbb{F}\cdot \cancel{\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\,|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\,dA$$

$$= \iint_D \mathbb{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA$$

Kort: $\boxed{d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,dA}$ (formelblad)

Ex Beräkna flödet av vektorfältet

$\mathbb{F} = \langle zx, zy, 0\rangle$ i pos. x-riktning genom halvcylindern

$\mathbf{r}(u,v) = \langle \cos u, \sin u, v\rangle$, $(u,v)\in D = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$.

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle \cos u, \sin u, 0\rangle$$

Om $-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2}$ är $\cos u\geq 0$, så pekar i pos. x-riktning, så har orienteringen vi vill.

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(u,v)) = \mathbb{F}(\cos u, \sin u, v) = \langle v\cos u, v\sin u, 0\rangle$$

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = \langle v\cos u, v\sin u, 0\rangle\cdot\langle\cos u, \sin u, 0\rangle = v$$

(trig. ettan)

så flödet blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v \, du\, dv = \pi \int_0^1 v\, dv =$$

$$= \pi \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} .$$