Sammanfattning Föreläsning 19

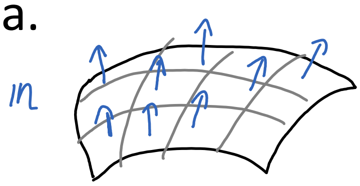
Ytintegral av funktion $f(x, y, z)$ över yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, där $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f\big(\mathbf{r}(u, v)\big)\, \big|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\big|\, dA$$

Om har yta S med densitet $\rho(x, y, z)$ så är dess **massa** $= \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$ och **masscentrum** $= \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right)$, där $M_x = \iint_S x\, \rho(x, y, z)\, dS$ osv.

En yta S är *orienterad* om man i varje punkt kan välja en enhetsnormalvektor $\mathbf{n}(x, y, z)$ som varierar kontinuerligt. Då kallas **n** en *orientering* av S.
Om S parametriseras av $\mathbf{r}(u, v)$ kan man ta $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$.

Med hjälp av $\mathbf{n}$ kan man då säga att S har "två sidor" (fram-/baksida eller in-/utsida), dvs den sida som pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$ och den motsatta.



Ytintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över en orienterad yta S med orientering $\mathbf{n}$ ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

(obs: högerledet är en ytintegral av en funktion)

Om S är parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ och har orientering $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ så blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA \qquad (\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, dA)$$

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska så är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

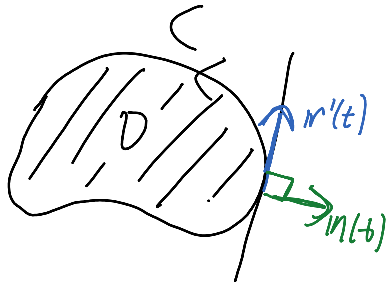
volymen av vätskan som passerar genom S under en tidsenhet (där volymen är positiv eller negativ beroende på om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{n}$ pekar i samma riktning eller inte)

Därför kallas ytintegraler av vektorfält också för **flödesintegraler** och värdet kallas för **flödet** av $\mathbf{F}$ genom S.

Divergens av vektorfält och flöde genom kurva 16.5

Antag C enkel sluten pos. orienterad kurva som begränsar $D \subseteq \mathbb{R}^2$, och C par. av $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$.

Kan visa att $\mathbf{n} = \dfrac{\langle y'(t), -x'(t) \rangle}{|\mathbf{r}'(t)|}$



är en enhetsnormalvektor till tangentlinjen som pekar ut från D.
($\mathbf{n}$ fås genom att rotera $\mathbf{r}'(t)$ med -90 grader och normalisera)

Som för ytor, definierar flödet av $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ genom C som

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Skall härleda formel för flödet som dubbelintegral över D.

Påminnelse a) Kurvintegral av funktion:

$$\int_C f \, ds \quad \text{där} \quad ds = |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

b) Kurvintegral av vektorfält: $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy, \quad \text{där } dx = x'(t)\,dt, \; dy = y'(t)\,dt.$$

c) Greens formel: $\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dA.$

Flödet ovan blir då

$$\int_C \mathbb{F}\bullet\mathbb{n}\,ds \underset{\substack{\text{def. av } \mathbb{n} \\ \text{och a)}}}{=} \int_a^b \underbrace{\frac{Py' - Qx'}{\cancel{|\mathbb{r}'|}}}_{=\mathbb{F}\bullet\mathbb{n}} \underbrace{\cancel{|\mathbb{r}'(t)|}\,dt}_{=ds} \underset{b)}{=} \int_C -Q\,dx + P\,dy$$

$$\underset{c)}{=} \iint_D \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} + \left(+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{\text{viktigt, så ger namn!}} dA$$

<u>Def</u> <u>Divergensen</u> av

i) $\mathbb{F} = \langle P, Q\rangle$ i $\mathbb{R}^2$ är $\operatorname{div}\mathbb{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

ii) $\mathbb{F} = \langle P, Q, R\rangle$ i $\mathbb{R}^3$ är $\operatorname{div}\mathbb{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Kan skrivas kort: $\operatorname{div}\mathbb{F} = \nabla\bullet\mathbb{F}$

där $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\rangle$ el. $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\rangle$.

Räkningen ovan kan då skrivas:

<u>Divergenssatsen för kurvor:</u>

$$\int_C \mathbb{F}\bullet\mathbb{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbb{F}\,dA.$$

Divergenssatsen för ytor 16.9

Def S är en sluten yta om den är randen till ett begränsat område $E \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ex Enhetssfären $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ är en sluten yta som är randen till klotet

$$E = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Kommer anta S består av ändligt många glatta ytor, som t.ex. randen till en kub, som består av sex rektanglar.

Def S är positivt orienterad om dess orientering $\mathbf{n}$ pekar ut från E.

Divergenssatsen Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ begr. område med rand S, och antag att S är positivt orienterad och består av ändligt många glatta ytor och att vektorfältet $\mathbb{F}$ har kontinuerliga partiella derivator. Då är

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbb{F} \, dV.$$

Motsvarar fallet med kurvor eftersom $\iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Visar det i ett specialfall, beviset i fallet i boken (s. 1141-43) bygger på samma idé.

<u>Ex</u> Låt E vara ett rätblock $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, och antag $\mathbb{F} = \langle 0, 0, R \rangle$.

Då följer divergenssatsen av upprepad integration:

Låt $D = [a,b] \times [c,d]$ s.a. $E = D \times [e,f]$.

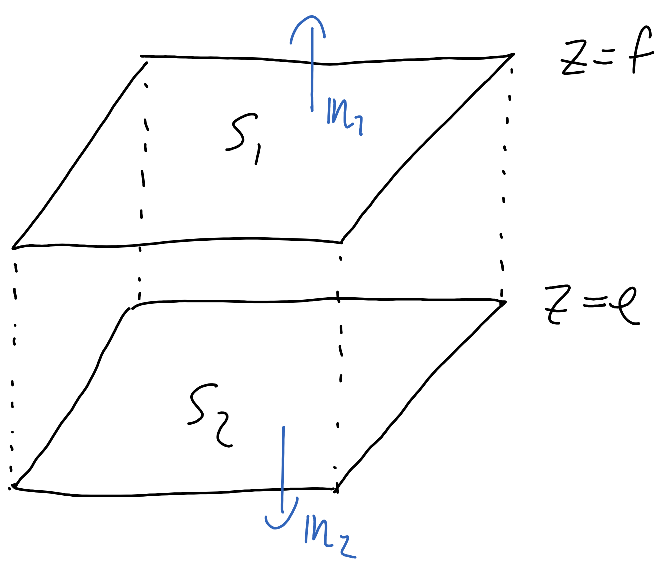
$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{så}$$

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV = \iint_D \int_e^f \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_D \left[R \right]_{z=e}^{z=f} dA =$$

$$= \iint_D R(x,y,f)\, dA - \iint_D R(x,y,e)\, dA$$

Vi jämför nu detta med ytintegralerna i divergenssatsen.

Randen S till E består av 6 st rektanglar:



osv.

S_1 par. av $\mathbf{r}_1(x,y) = \langle x, y, f\rangle$, $(x,y) \in D$,

och normalvektor är $\mathbf{n}_1 = \langle 0,0,1\rangle$
(pekar ut från E)

Då blir $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} =$

$$= \iint_D \underbrace{\langle 0, 0, R(x,y,f)\rangle}_{= \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(x,y))} \cdot \langle 0,0,1\rangle \, dA$$

$$= \iint_D R(x,y,f)\, dA,$$ vilket är första integralen ovan.

På liknande sätt blir $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ lika med andra integralen ovan (med minustecken för $\mathbf{n}_2 = \langle 0,0,-1\rangle$).

Eftersom $\mathbf{n}_3, \ldots, \mathbf{n}_6$ bara pekar i x- eller y-led blir dess z-komponent 0, så om $i = 3, \ldots, 6$ är

$$\iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_i} \underbrace{\langle 0,0,R\rangle \cdot \mathbf{n}_i}_{=0} \, dS = 0.$$

För att sammanfatta:

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV = \iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} + \iint_{S_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} =$$

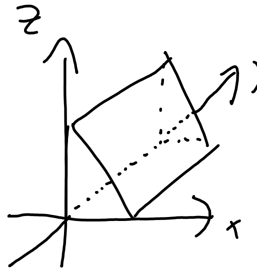
$$= \iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} + \ldots + \iint_{S_6} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S},$$

Vilket visar divergenssatsen i detta specialfallet.

<u>Ex</u> Beräkna flödet av $\mathbb{F} = (z^2, y^2, x^2)$ ut ur området mellan planen $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ och $z=2-2x$.

Området som begränsas av planen är

$$E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2-2x\}.$$



Om S den positivt orienterade randen till E är flödet ut ur E:

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} \underset{\text{(div. satsen)}}{=} \iiint_E \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV = \iiint_E 2y\, dV =$$

$$\underset{\text{(upprepad integration)}}{=} \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-x} 2y\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^2 2y(2-2x)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 (2-2x)\left[y^2\right]_0^2 dx = 4 \int_0^1 2-2x\, dx = 4\left[2x - x^2\right]_0^1 = 4.$$