Sammanfattning Föreläsning 19

Ytintegral av funktion $f(x, y, z)$ över yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, där $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$:

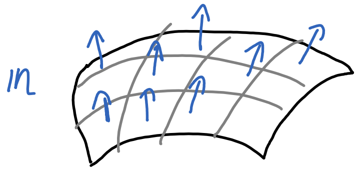
$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\right| dA$$

Om har yta S med densitet $\rho(x, y, z)$ så är dess **massa** $= \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$ och **masscentrum** $= \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right)$, där $M_x = \iint_S x\, \rho(x, y, z)\, dS$ osv.

En yta S är *orienterad* om man i varje punkt kan välja en enhetsnormalvektor $\mathbf{n}(x, y, z)$ som varierar kontinuerligt. Då kallas $\mathbf{n}$ en *orientering* av S.

Om S parametriseras av $\mathbf{r}(u, v)$ kan man ta $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$.

Med hjälp av $\mathbf{n}$ kan man då säga att S har "två sidor" (fram-/baksida eller in-/utsida), dvs den sida som pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$ och den motsatta.



Ytintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över en orienterad yta S med orientering $\mathbf{n}$ ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

(obs: högerledet är en ytintegral av en funktion)

Om S är parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ och har orientering $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ så blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right) dA \qquad (\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, dA)$$

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska så är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

volymen av vätskan som passerar genom S under en tidsenhet

(där volymen är positiv eller negativ beroende på om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{n}$ pekar i samma riktning eller inte)

Därför kallas ytintegraler av vektorfält också för **flödesintegraler** och värdet kallas för **flödet** av $\mathbf{F}$ genom S.