## Sammanfattning Föreläsning 20

**Divergens** av ett vektorfält

i) $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ i $\mathbb{R}^2$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}}$$

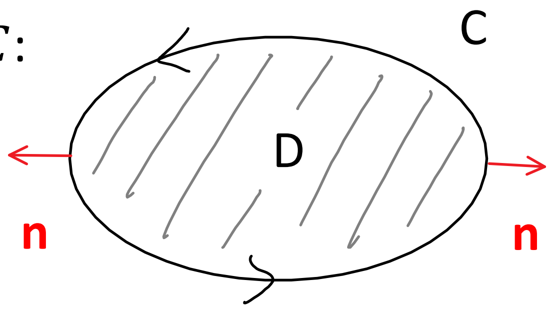
ii) $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{z}}$$

Kortare: div $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{F}$, där $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ eller $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$.

Låt $C$ vara en enkel sluten kurva som begränsas av ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{n}$ vara en enhetsnormalvektor till tangentlinjen till $C$ som pekar ut från $D$. Då är flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ ut genom $C$:

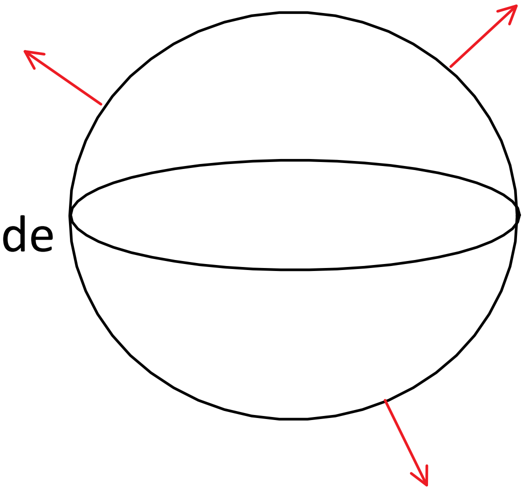
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s$$




**Divergenssatsen för kurvor**

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \iint_D \text{div}\,\mathbf{F}\, \mathrm{d}A$$

Om $S$ är randen till ett område $E$ så säger man att $S$ är en *sluten yta.* $S$ är *positivt orienterad* om dess orientering pekar ut från $E$



**Divergenssatsen**

Låt $S$ vara den positivt orienterade randen till ett område $E \subseteq \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{F}$ ett vektorfält på $E$**.**

Då är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_E \mathrm{div}\, \mathbf{F}\, dV$$

## Innebörd av divergens av ett vektorfält

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska och $E \subseteq \mathbb{R}^3$ med rand $S$, så följer av divergenssatsen att

$$\begin{Bmatrix}\text{det som produceras} \\ \text{eller konsumeras i } E\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{flödet ut} \\ \text{ur } E\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{flödet} \\ \text{genom } S\end{Bmatrix}$$

$$= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \; dV,$$

dvs. $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är en "densitet" för hur mycket vätska som produceras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är positiv) eller konsumeras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är negativ).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) > 0$ blir HL positivt för allt tillräckligt små områden $E$ kring $(x, y, z)$ och då måste vätska produceras kring $(x, y, z)$. Säger då att $(x, y, z)$ är en **källa** (source).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) < 0$ måste istället vätska konsumeras kring $(x, y, z)$ och man säger då att $(x, y, z)$ är en **sänka** (sink).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ överallt säger man att $\mathbf{F}$ är **källfritt** (incompressible), vilket innebär att genom varje område strömmar lika mycket in som ut.

# Rotationen av ett vektorfält 16.5

**Def** Rotationen (curl) av ett vektorfält $\mathbb{F} = (P, Q, R)$ i $\mathbb{R}^3$ är

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle.$$

---

Formeln kan sammanfattas

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(Bara i tre dimensioner!)

---

Rotation används bland annat för att formulera två av Maxwell's lagar i elektromagnetism.

---

Om $f$ har kont. part. andraderivator och $\mathbb{F} = \nabla f$, så blir

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \dots \right\rangle$$

$= 0$ enl. Clairants sats.

**Sats** Om $\mathbb{F}$ vektorfält på $\mathbb{R}^3$ vars komponenter har kont. partiella derivator och

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = 0$$

så är $\mathbb{F}$ konservativt, dvs $\mathbb{F} = \nabla f$ för någon funktion $f$.

(Gäller mer allmänt på områden som är enkelt sammanhängande, dvs. "utan hål", men går inte in på hur definieras i $\mathbb{R}^3$)

---

Kan använda liknande metod som i $\mathbb{R}^2$ för att hitta potential.

**Ex** Visa att $\mathbb{F} = \langle z, 2y, x+2z \rangle$ är konservativt, och bestäm en potential.

---

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 2y & x+2z \end{vmatrix} = \langle 0, -\tfrac{\partial}{\partial x} x + \tfrac{\partial}{\partial z} z, 0 \rangle = 0,$$

så $\mathbb{F}$ konservativt enl. sats.

Vill lösa $\begin{cases} f_x = z & (i) \\ f_y = 2y & (ii) \\ f_z = x + 2z & (iii) \end{cases}$

En lösning till (i) är $f_0 = xz$,
allmänna lösningen är $f(x,y,z) = xz + g(y,z)$ (*).

$$\Rightarrow \quad 2y \underset{(ii)}{=} f_y \underset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left( xz + g(y,z) \right) = g_y(y,z)$$

En lösn: $g_0 = y^2$, allm. lösn. $g = g_0 + h(z) = y^2 + h(z)$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = xz + g(y,z) = xz + y^2 + h(z) \quad (**)$$

$$\Rightarrow \quad x + 2z \underset{(iii)}{=} f_z \underset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left( xz + y^2 + h(z) \right) = x + h'(z)$$

$$\Rightarrow \quad h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = z^2 + C$$

så $f = xz + y^2 + z^2 + C$ potential till $\mathbb{F}$.

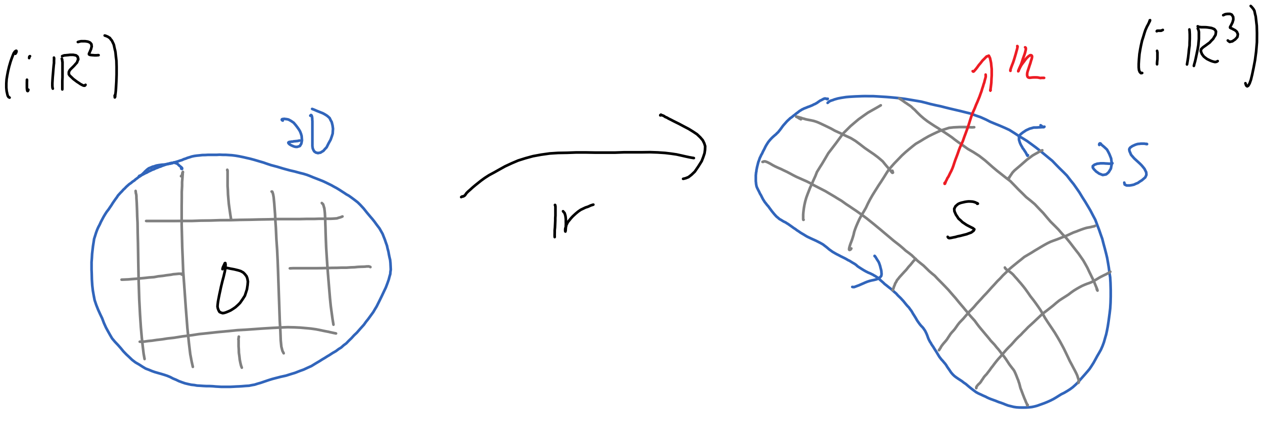
---

## Stokes sats 16.8

Låt $S$ vara en yta i $\mathbb{R}^3$ par. av $\mathbb{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$.
Låt $\partial D$ vara randen till $D$ och $\partial S$ vara bilden av $\partial D$ under $\mathbb{r}$.

En orientering $\mathbb{n}$ av $S$ ger en orientering av $\partial S$ genom att man går moturs längs $\partial S$ runt $\mathbb{n}$.

Om $\partial S$ har den orienteringen säger man att den är <u>positivt orienterad</u>.



## Stokes sats

Låt $S$ vara en orienterad yta och antag att dess rand $C = \partial S$ är en enkel sluten kurva som är positivt orienterad. Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält med kontinuerliga partiella erivator. Då är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

---

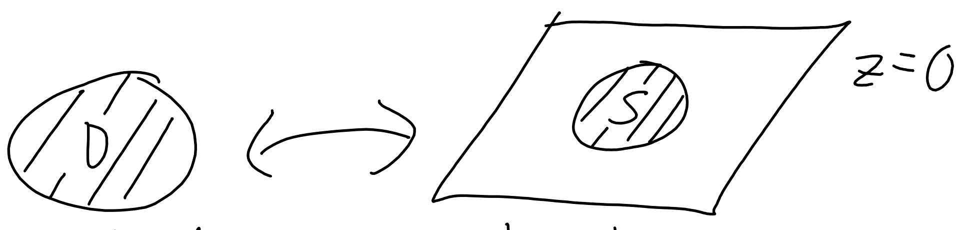
Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är ett område med rand $C$ och $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ett vektorfält på $D$ kan man också se det som ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q, 0) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ på $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Då blir } \operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Greens formel säger att $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{= \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}} \, dA$

Om man låter $S = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in D\}$ så ger $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ en orientering av $S$, s.a. $\displaystyle\iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ och

Greens formel för $D$ blir då Stokes formel för $S$.




Greens formel          Stokes sats

<u>Anm:</u> Man ser på liknande sätt som att $\operatorname{rot} \nabla f = 0$ också att $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbb{F}) = 0$, dvs $\mathbb{G} = \operatorname{rot} \mathbb{F}$ är källfritt.

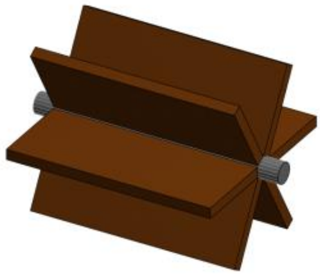
Omvänt gäller t.ex. på $\mathbb{R}^3$ eller "lämpliga" områden $E \subseteq \mathbb{R}^3$ att om $\mathbb{G}$ är källfritt, dvs. om $\operatorname{div} \mathbb{G} = 0$ så finns ett vektorfält $\mathbb{F}$ s.a. $\mathbb{G} = \operatorname{rot} \mathbb{F}$.

Inom fysik är det ett vanligt krav att vektorfält är källfria, vilket då ger relevanta exempel när Stokes sats är tillämpbar.

## Geometrisk tolkning av $\operatorname{rot} \mathbf{F}$:

Antag att $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska.
Placera ut ett skovelhjul med centrum i en punkt $(x, y, z)$

Hastigheten av hur skovelhjulet snurrar beror på i vilken riktning man placerar rotationsaxeln.



*Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är* $\operatorname{rot} \mathbf{F}$*.*

Antag att hjulet roterar kring

- en axel med riktningsvektor $\mathbf{n}$ (blå)

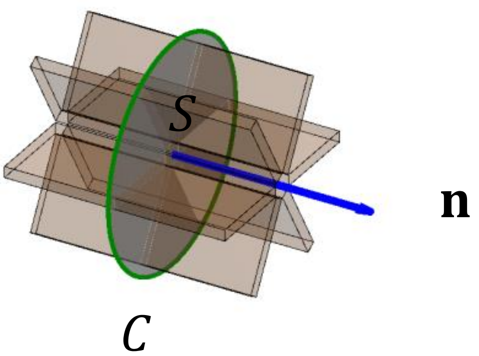
och att det följer

- en cirkel $C$ (grön)

som begränsar

- en yta $S$ (grå)

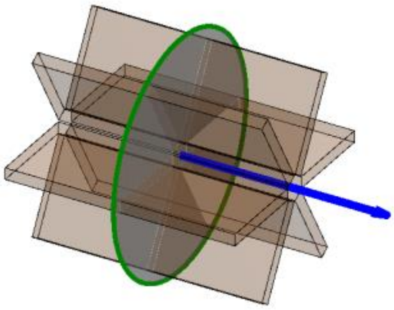
Då kan man ta $\mathbf{n}$ som normalvektor till $S$.



Hur snabbt hjulet roterar är proportionellt mot arbetet av $\mathbf{F}$ längs $C$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \{\text{ Stokes sats }\}$$

$$= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, dS$$



Hastigheten av hjulet är alltså proportionell mot

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, dS$$

Om man delar dubbelintegralen med arean av S och sedan låter radien gå mot 0 så går detta mot $\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\ \mathbf{n}$. Detta blir som störst om $\mathbf{n}$ och $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ pekar i samma riktning, dvs:

*Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$*.*

(när storleken på hjulet går mot 0)