Sammanfattning Föreläsning 21

Rotationen (curl) av ett vektorfält $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ är

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle .$$

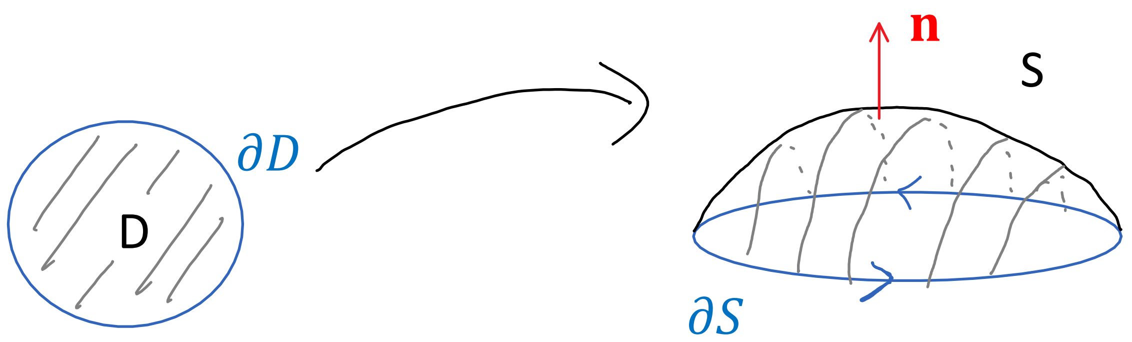
$$\operatorname{rot} \nabla f = 0.$$

Omvänt gäller:

Sats Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ och
$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$
så är $\mathbf{F}$ konservativt, dvs.,
$\mathbf{F} = \nabla f$
för någon funktion f.

Om S är en yta parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ så är dess *rand* ∂S bilden av randen ∂D av D.

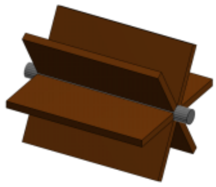
Randen är *positivt orienterad* om den går moturs runt orienteringen $\mathbf{n}$ av S.



Stokes sats S orienterad yta med positivt orienterad rand $C = \partial S$. Då är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

- Motsvarar Greens formel för $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Ger geometrisk tolkning av $\operatorname{rot} \mathbf{F}$:
  Om placerar ett (oändligt litet) skovelhjul i (x, y, z)*, så snurrar hjulet som snabbast om rotationsaxeln är* $(\operatorname{rot} \mathbf{F})(x, y, z)$



Kommentarer inför tentan

- Listan med *kursmål* på hemsidan specificerar vad ni förväntas kunna och vad tentan kommer testa på.
- Uppgifterna i *övningsprogrammet* testar på *alla* dessa målen.
- Duggorna i Möbius testar på många,
  men *långt från alla* målen.
- En del gamla tentor innehåller uppgifter om krökningsradie, det ingår inte i kursen i år.
- Kolla vad som finns med på formelbladet.

Stokes sats (forts.)

Anm: Stokes sats kan användas för att visa satsen från förra föreläsningen, att ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ är konservativt precis om dess rotation är noll, se s. 1138.

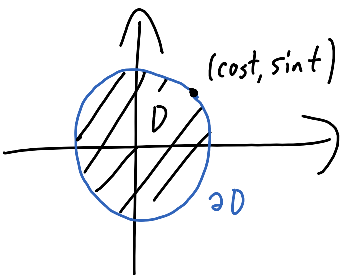
Ex Låt S vara delen av planet $z=2x$ där $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, där orienteringen är i positiv z-riktning.

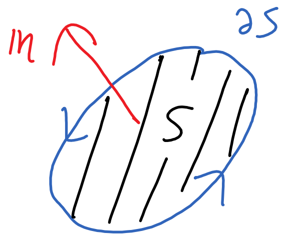
Verifiera Stokes sats på S för $\mathbb{F} = \langle -y, x, 5z \rangle$.

Kan parametrisera S med $\mathbb{r}(x,y) = \langle x, y, 2x \rangle$, $(x,y) \in D$.

Randen ∂D till D kan parametriseras med $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, så ∂S kan parametriseras med

$$\mathbb{q}(t) = \mathbb{r}(\cos t, \sin t) = \langle \cos t, \sin t \rangle, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$





∂S går moturs kring $\mathbb{n}$, så rätt orientering.

a) Beräknar VL: $\int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \bullet \mathbb{r}'(t)\, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \langle -\sin t, \cos t, 5 \cdot 2\cos t \rangle \bullet \langle -\sin t, \cos t, -2\sin t \rangle dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1} - \underbrace{20 \cos t \sin t}_{=10 \sin(2t)}\, dt =$$

$$= \left[t + 5\cos(2t) \right]_0^{2\pi} = 2\pi + 5 - 5 = 2\pi.$$

b) Beräknar HL:

$$\text{rot}\, \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 5z \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 2 \rangle.$$

Om S par. av $\mathbb{r}(x,y)$ är $d\mathbb{S} = \mathbb{r}_x \times \mathbb{r}_y \, dA$.

$$\mathbb{r}_x \times \mathbb{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle -2, 0, 1 \rangle$$

så $\iint_S \text{rot}\mathbb{F} \bullet d\mathbb{S} = \iint_D \text{rot}\, \mathbb{F} \bullet (\mathbb{r}_x \times \mathbb{r}_y)\, dA =$

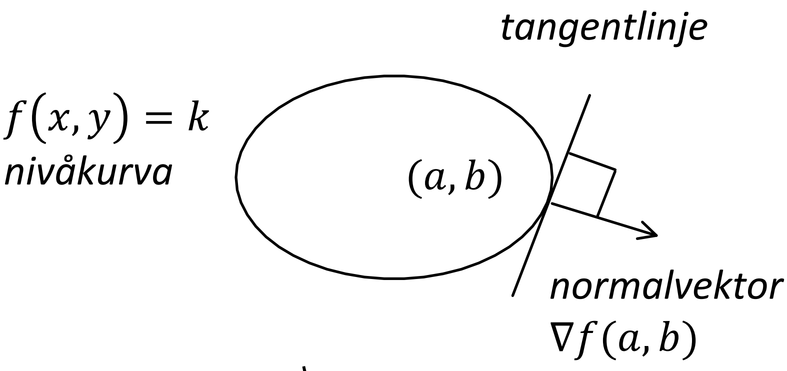
$$= \iint_D \langle 0,0,2 \rangle \bullet \langle -2, 0, 1 \rangle dA = 2 \iint_D dA = 2\,\text{area}(D) = 2\pi.$$

Samma svar, 2π i a) och b) som väntat.

Repetition

Reellvärda funktioner av två variabler

$f(x, y)$ funktion



Gradient $\nabla f(a, b) = \left\langle f_x(a, b), f_y(a, b) \right\rangle$

Tangentlinje till nivåkurvan
$\nabla f(a, b) \cdot \langle x - a, y - b \rangle = 0$

Riktningsderivata i riktning $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$):
$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$

Riktning där **växer som mest**

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{\left|\nabla f(a, b)\right|}$$

(om $\nabla f(a, b) \neq 0$)

Har motsvarigheter i tre variabler (tangentplan istället för tangentlinje, nivåyta istället för nivåkurva osv.)

Tenta 2014-08-21

7) Beräkna tangentplanet till nivåytan

$$e^y \arctan(xy) + (z-1)e^z = 0$$

i punkten $(0,1,1)$.

Ytan är nivåytan $F(x,y,z) = 0$, där

$$F(x,y,z) = e^y \arctan(xy) + (z-1)e^z.$$

[Obs: Inte på formen att grafen till funktion, och skulle vara svårt lösa ut z i termer av x och y]

$$\left(\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2} \right)$$

$F_x = e^y \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot y$, $\quad F_x(0,1,1) = e$

(kedjeregeln)

$F_y = e^y \arctan xy + e^y \frac{1}{1+(xy)^2} x \quad F_y(0,1,1) = 0$

(prod+kedjeregeln)

$F_z = e^z + (z-1)e^z = ze^z \quad F_z(0,1,1) = e$

så $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle = \langle e, 0, e \rangle$

Tangentplanet blir då

$$\nabla F(0,1,1) \bullet \langle x-0, y-1, z-1\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e(x-0) + 0\cdot(y-1) + e(z-1) = 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad x+z=1}$$

$f(x,y)$ kan visualiseras med sin graf $z = f(x,y)$.

Tangentplan till grafen av en funktion $f(x,y)$ *i en punkt* (a,b)

$$z = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}_{=L(x,y)}$$

z-värdet $L(x,y)$ kallas **lineariseringen** av *f* kring *(a,b)* och om *f* är deriverbar kan den användas för att approximera *f* nära (a,b).

Grafen $z = f(x,y)$ är en nivåyta $F(x,y,z) = 0$ för $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ och tangentplanet till grafen av f = tangentplanet till nivåytan av F

Ex Bestäm lineariseringen av $f(x,y) = \ln(2x^2 - y)$ kring $(1,1)$, och använd den för att approximera $\ln(2 \cdot 1.01^2 - 0.99)$

$\frac{d}{dt}\ln t = \frac{1}{t}$, så

$$f_x = \frac{1}{2x^2-y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - y) = \frac{4x}{2x^2-y} \qquad f_x(1,1) = 4$$

$$f_y = \frac{1}{2x^2-y} \cdot (-1) \qquad f_y(1,1) = -1$$

så lineariseringen kring $(1,1)$ är

$$L(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) =$$
$$= 0 + 4(x-1) - 1 \cdot (y-1)$$

Det vi vill approximera är $f(1.01, 0.99)$.

$L(x,y)$ nära $f(x,y)$ om (x,y) nära $(1,1)$, så

$$\ln(2\cdot 1.01^2 - 0.99) = f(1.01, 0.99) \approx L(1.01, 0.99) = 4\cdot(1.01-1) - (0.99-1)$$
$$= 4\cdot 0.01 + 0.01 = 0.05$$

(exakt värde $0.0489\ldots$)

Gränsvärden

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x,y\right) = L$ om "*$f(x,y)$ hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b)*"

Strategier för att beräkna gränsvärden:

- Om sammansättning av elementära funktioner och *är definierad* (dvs. delar inte med 0 eller liknande),
  kan sätta in $\left(x,y\right) = (a,b)$
  Exempel $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \sin\left(\frac{\pi x^2}{y}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

  Exempel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4 - x^5}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\left(\left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 + x^2\right)\right)}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(y^2 - x^2\right) = 0$$

- Försök skriva det som en sammansättning med en funktion av en variabel.

<u>Exempel</u> $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2\ln(x^2+y^4)}{x^2+y^4-1}$

$\frac{2\ln(x^2+y^4)}{x^2+y^4-1} = h(f(x,y))$ där $h(t) = \frac{2\ln(t)}{t-1}$ och $f(x,y) = x^2 + y^4$

Eftersom $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 1$ och $\lim_{t\to 1} h(t) = 2$
(standardgränsv. alt. l'Hospital, alt def. av derivata för $2\ln(t)$ i $t = 1$)
så $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2\ln(x^2+y^4)}{x^2+y^4-1} = 2$.

- *Instängningsregeln*: Om
$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$
och
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$
så är
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$

Strategi för att visa att gränsvärde *inte* existerar

- Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ så måste
$\lim_{t\to t_0} f(\mathbf{r}(t)) = L$
för *alla* kurvor $\mathbf{r}(t)$ med $\mathbf{r}(t_0) = \langle a, b\rangle$.

Om då får olika gränsvärden, t.ex., längs olika räta linjer genom (a,b) så finns gränsvärdet *inte.*

Ex Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

Kan prova längs räta linjer genom origo: $\mathbf{r}(t) = \langle kt, lt \rangle$

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = \frac{k^3t^3}{k^2t^2+l^2t^2} = \frac{k^3t}{k^2+l^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

så verkar rimligt gissa att gränsvärdet existerar, (och måste då vara 0).

Fortsätter nästa gång och visar att är så.