Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy-planet:

$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

$\underline{dV = r\,dr\,d\theta\,dz}$

Sfäriska koordinater

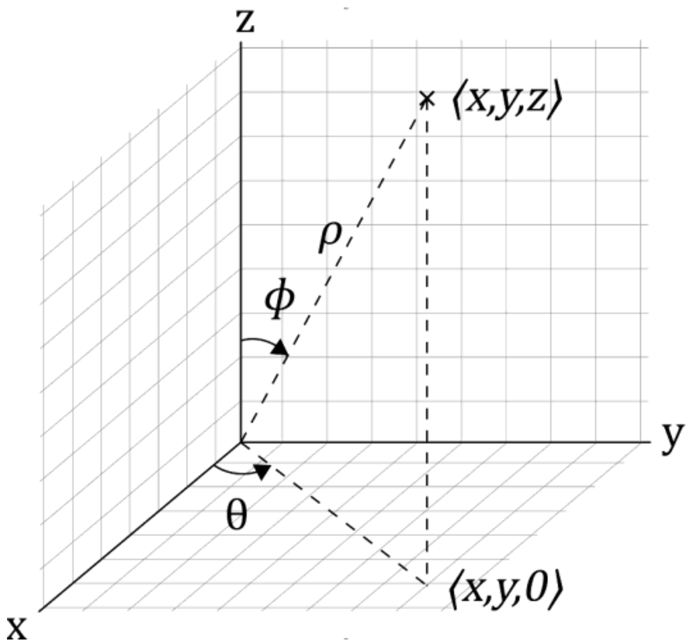
$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

($0 \leq \rho$

$0 \leq \phi \leq \pi$,

oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$

el. $-\pi \leq \theta \leq \pi$)



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"

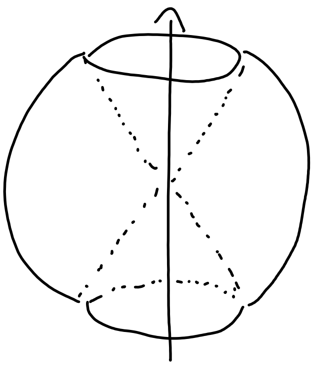
Integration:

$\underline{dV = \rho^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi\,d\rho}$

Ex Beräkna volymen av delen E av klotet

$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ som ligger mellan

konerna $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ och $z = \sqrt{x^2+y^2}$

E: 

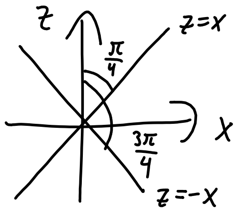
Uttrycker E i sfäriska koord:

För att ligga innanför sfären måste

$0 \le \rho \le 1$.

Konerna fås genom att rotera $z = x$ resp. $z = -x$ kring z-axeln, och dessa linjer har vinklar $\pi/4$ resp. $3\pi/4$ till pos. z-axeln. Området mellan blir då

$$\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3\pi}{4}.$$



Inga mer krav, så $0 \le \theta \le 2\pi$.

Integrerar vi i sfäriska koord. blir då

$$\iiint_E dV = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho = 2\pi \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2 \left[-\cos\phi \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} d\phi\, d\rho = 2\pi \cdot \left(-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Kurvintegraler av vektorfält

C kurva, parametrisering $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$, $\mathbf{F}$ vektorfält

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(\mathrm{t})\ dt$$

Om $\mathbf{F} = \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$, skrivs integralen också

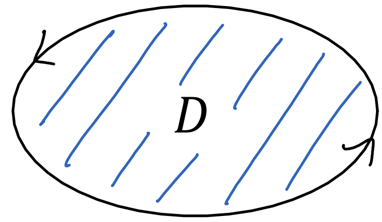
$$\int_C P\, dx + Q dy$$

dvs. om $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ så är

$dx = x'(t)\, dt$ och $dy = y'(t)\, dt$.

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D. Då är

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$



C

Ex Beräkna arean av området D innanför kurvan C parametriserad av $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \sin^3 t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$, genom att tillämpa Green's formel på vektorfältet $\mathbf{F} = \frac{1}{2}\langle -y, x \rangle$.

Precis som för $\langle \cos t, \sin t \rangle$ ser man att $\langle \cos^3 t, \sin^3 t \rangle$ går moturs, så positivt orienterad.

Om $\mathbf{F} = (P, Q) = \frac{1}{2}(-y, x)$ blir $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, så

$$\text{area}(D) = \iint_D 1\,dA = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \underbrace{\int_C P\,dx + Q\,dy}_{\text{(Green's formel)}} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\langle -\sin^3 t, \cos^3 t \rangle \cdot \langle 3\cos^2 t(-\sin t), 3\sin^2 t \cos t \rangle\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^4 t \cos^2 t + \cos^4 t \sin^2 t}_{\underbrace{\sin^2 t\cos^2 t}_{(\underbrace{\sin t \cos t}_{= \frac{\sin(2t)}{2}})^2}\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}}\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2t)}{4}\,dt =$$

$$\left(\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{med } x = 2t\right)$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2}\,dt = \frac{3}{16}\left[t - \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

Konservativa vektorfält

$\mathbf{F}$ *konservativt* om $\mathbf{F} = \nabla f$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big)$$

På $\mathbb{R}^2$ (eller enkelt sammanhängande områden)
$\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$ konservativt precis om $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

"derivatan av *första* komponenten m.a.p. *andra* variabeln
= derivatan av *andra* komponenten m.a.p. *första* variabeln"

Rotation av vektorfält på $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle .$$

På $\mathbb{R}^3$ (eller enkelt sammanhängande områden i $\mathbb{R}^3$):
$\mathbf{F}$ konservativt precis när $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Uppgift 16.3.20 (något modifierad)

Beräkna $\int_C -ye^{-x}dx + (1+e^{-x})dy$,

där C är vilken kurva som helst från $(0,1)$ till $(1,2)$

Är lika med $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbb{F} = \langle 1-ye^{-x}, e^{-x}\rangle$.

Kollar om $\mathbb{F} = \langle P, Q\rangle$ är konservativt:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -e^{-x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-x}$, lika, så ja!

Bestämmer potential: $\begin{cases} f_x = -ye^{-x} & (1) \\ f_y = 1+e^{-x} & (2) \end{cases}$

(1) lösning $f = ye^{-x} + g(y) \quad (*)$

$\Rightarrow \quad 1+e^{-x} \underset{(2)}{=} f_y \underset{(*)}{=} e^{-x} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 1.$

Kan ta $g(y) = y \Rightarrow f(x,y) = ye^{-x} + y.$

Då blir

$$\int_C -ye^{-x}dx + (1+e^{-x})\,dy = \int_C \underbrace{\mathbb{F}}_{=\nabla f}\cdot d\mathbf{r} = f(1,2) - f(0,1)$$

(huvudsatsen för kurvintegraler)

$$= 2e^{-1} + 2 - (1+1) = 2e^{-1}.$$

Ytintgraler på yta S, parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$

$\iint_S f(x,y,z)\, dS$ där $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$

Speciellt, om S grafen till $f(x,y)$: $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle \text{ (formelsamling)}$$

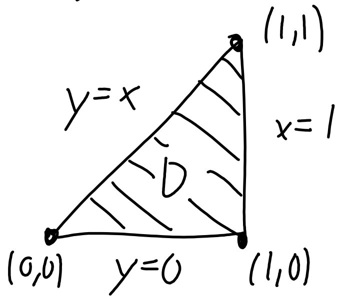
och då

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

<u>Uppgift 16.6.44</u> (Gick ej igenom på föreläsningen)

Beräkna arean av delen av ytan $z = 4 - 2x^2 + y$ som ligger över triangeln med hörn $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

Ytan är grafen till $f(x,y) = 4 - 2x^2 + y$, $(x,y) \in D$, D enl. figur:



$f_x = -4x$, $f_y = 1$ så $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + (-4x)^2 + 1} = \sqrt{2 + 16x^2}$

$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

Så arean blir:

$$A = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{2+16x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 x\sqrt{2+16x^2}\, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = 2+16x^2 \\ dt = 32x\, dx \\ x=0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = 18 \end{array} \right\} = \int_2^{18} \sqrt{t}\, \frac{dt}{32} = \frac{1}{32}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_2^{18} = \frac{1}{48}\left(18^{3/2} - 2^{3/2}\right)$$

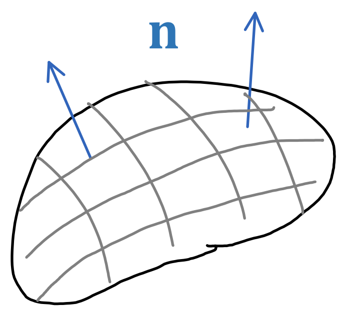
$$= \frac{1}{48} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(3^3 - 1\right) = \frac{1}{24}\sqrt{2} \cdot 26 = \frac{13\sqrt{2}}{12}.$$

Flöde genom oriententerad yta S

parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, orientering $\mathbf{n}$

$$d\mathbf{S} = \pm(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dA$$

(+ om $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$, - annars)



Flöde genom S:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dA$$

Ex Beräkna flödet av $\mathbb{F} = \langle x-y, -x, z \rangle$ upp genom ytan $z = xy$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.

S är grafen $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ där $f(x,y) = xy$.

Då är $\mathbb{r}_x \times \mathbb{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle = \langle -y, -x, 1 \rangle$.

Pekar i pos. z-riktning, så rätt orientering.

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iint_D \underbrace{\mathbb{F}(x,y,xy)}_{=\langle x-y,-x,xy \rangle} \cdot \langle -y,-x,1 \rangle\,dA$$

$$= \iint_D -\cancel{xy} + y^2 + x^2 + \cancel{xy}\,dA = \iint_D x^2+y^2\,dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{polära koord:} \\ D: 0 \le r \le 1, \\ \quad 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \underbrace{r\,d\theta\,dr}_{=dA} = 2\pi \int_0^1 r^3\,dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Divergenssatsen

S randen till område $E \subseteq \mathbb{R}^3$, orientering pekar ut från E

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Stokes sats

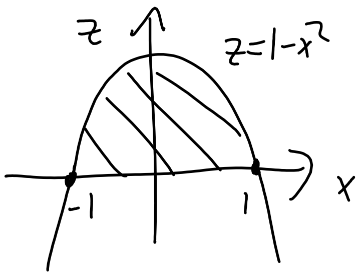
Yta S har rand $C = \partial S$, orienterad moturs kring orientering av S

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Ex Beräkna flödet av $\mathbb{F} = \langle x^2, z^2, y^2 \rangle$ ut ur randen S till området E som begränsas av ytan $z = 1 - x^2$ och planen $y = 0$, $x = 2$ & $z = 0$.

(Gick inte igenom på föreläsningen)

I xz-planet:



$E = \{(x,y,z) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1-x^2\}$.

flödet ut ur $S = \iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbb{F} \, dV = \int_{-1}^{1}\int_0^2\int_0^{1-x^2} 2x + 0 + 0 \, dz\,dy\,dx$

(div. satsen)

$= \int_{-1}^{1}\int_0^2 2x(1-x^2)\,dy\,dx = 4\int_{-1}^{1} x - x^3\,dx = 4\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right) = 0.$