Repetition 3

Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy-planet:

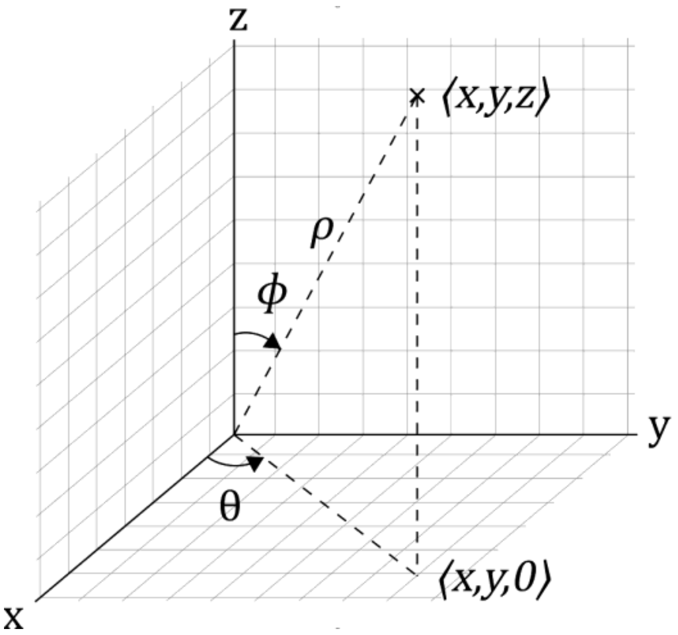
$$\left(x, y, z\right) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)$$

$$\underline{dV = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

($0 \leq \rho$
$0 \leq \phi \leq \pi$,
oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$
el. $-\pi \leq \theta \leq \pi$)



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"

Integration:

$\underline{dV = \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho}$

Kurvintegraler av vektorfält

C kurva, parametrisering $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$, $\mathbf{F}$ vektorfält

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(\mathrm{t}) \; dt$$

Om $\mathbf{F} = \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$, skrivs integralen också

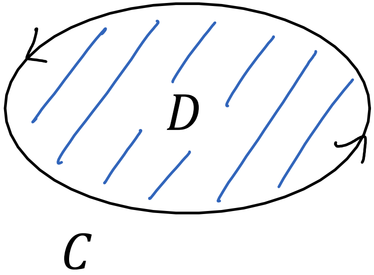
$$\int_C P\, dx + Q dy$$

dvs. om $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ så är

$dx = x'(t)\, dt$ och $dy = y'(t)\, dt$.

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D. Då är

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$



Konservativa vektorfält

$\mathbf{F}$ *konservativt* om $\mathbf{F} = \nabla f$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big)$$

På $\mathbb{R}^2$ (eller enkelt sammanhängande områden)

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservativt precis om $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

"derivatan av *första* komponenten m.a.p. *andra* variabeln
$=$ derivatan av *andra* komponenten m.a.p. *första* variabeln"

Rotation av vektorfält på $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle .$$

På $\mathbb{R}^3$:

$\mathbf{F}$ konservativt precis när $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Ytintgraler på yta S, parametriserad av $\mathbf{r}(u,v), (u,v) \in D$

$\iint_S f(x,y,z)\, dS$ där $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$

Speciellt, om S grafen till $f(x,y)$: $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

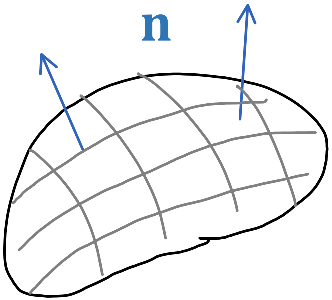
$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$$ (formelsamling)

och då

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Flöde genom oriententerad yta S

parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, orientering $\mathbf{n}$



$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \pm(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dA$$

(+ om $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$, **-** annars**)**

Flöde genom S:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dA$$

$$\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle: \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergenssatsen

S randen till område $E \subseteq \mathbb{R}^3$, orientering pekar ut från E

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Stokes sats

Yta S har rand $C = \partial S$, (orienterad moturs kring orientering av S)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$