Sammanfattning Föreläsning 2
Funktioner av två eller tre variabler, $f(x,y)$ eller $f(x,y,z)$ har **definitionsmängd** (där de är definierade) och **värdemängd** (värden som de antar).

En funktion $f(x,y)$ av två variabler kan studeras med **grafen** $z = f(x,y)$ eller **nivåkurvor** $f(x,y) = k$ för olika värden på k.

En funktion $f(x,y,z)$ av tre variabler kan studeras med **nivåytor** $f(x,y,z) = k$ för olika värden på k, men **grafen** $w = f(x,y,z)$ i fyra dimensioner, kan *inte* ritas!

Repetition, gränsvärden i en variabel
I envariabelkursen, studerade funktioner m.h.a. bland annat kontinuitet och derivator. Dessa begrepp är definierade med hjälp av gränsvärden

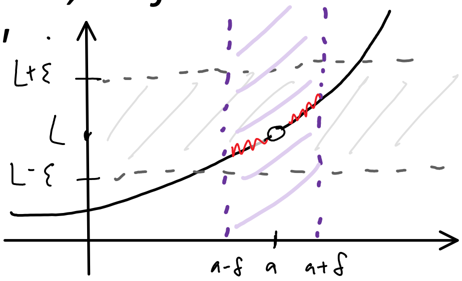
Kontinuitet: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ Derivata: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Behöver gränsvärden för att prata om kontinuitet och deriverbarhet av funktioner i flera variabler.

Påminnelse: I en variabel, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betyder informellt:
"$f(x)$ är hur nära L som helst, så länge x är tillräckligt nära a"

Mer precist matematiskt formulerat:

"för varje $\epsilon > 0$*, så finns* $\delta > 0$ s.a. $|f(x) - L| < \epsilon$ *om* $|x - a| < \delta$*"*



För varje "band" i y-led kring L, kan välja "band" i x-led kring a, så att på bandet i x-led ligger grafen innanför bandet i y-led

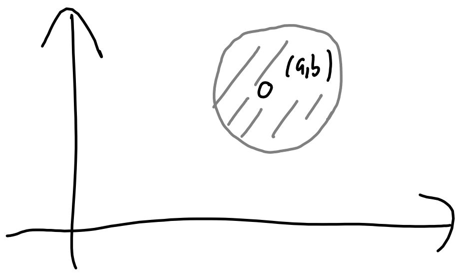
Gränsvärden och kontinuitet 14.2

(Motsvarande def. som i en variabel)

Def En funktion $f(x,y)$ har gränsvärdet (limit) L när (x,y) går mot (a,b), vilket skrivs

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

om för varje $\varepsilon > 0$ så finns $\delta > 0$ s.a. om $0 < |(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ så är $|f(x,y) - L| < \varepsilon$



för varje $\varepsilon > 0$, finns cirkelskiva med radie $\delta > 0$ (som beror på ε) s.a. $L - \varepsilon < f(x,y) < L + \varepsilon$ där.

informell definition: $f(x,y)$ är hur nära L som helst, så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b).

(mer oprecist: $f(x,y)$ närmar sig L när (x,y) närmar sig (a,b))

Räkneregler

Antag $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$.

a) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = L \pm M$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\,g(x,y) = L \cdot M$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$ <u>om</u> $M \neq 0$.

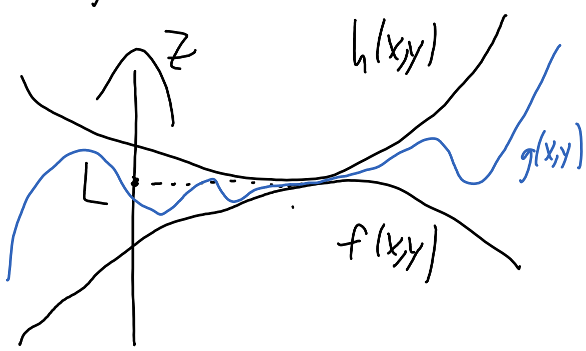
d) Om $h(t)$ funktion av en variabel s.a. $\lim_{t\to L} h(t) = K$

så är $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(f(x,y)) = K$$

e) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \quad \text{och} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

f) Om $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ och

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$$



så är $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$$

(instängningsregeln, squeeze theorem)

Ex Beräkna $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ om det existerar.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$ (enl. a), b) och e))

så kan inte direkt använda c).

Kan förkorta: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2-y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2 = 0$ (som ovan)

Ex Visa att $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} = 0$.

$$0 \le \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} = (x-1)^2 \underbrace{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}}_{\le 1} \le (x-1)^2$$

Låt $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = \dfrac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2}$, $h(x,y) = (x-1)^2$.

Då är $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} h(x,y)$

så enligt instängningsregeln är

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y) = 0$$

Strategi för att använda instängningsregeln:

Hitta funktioner som är större resp. mindre där kan beräkna gränsv., men tillräckligt lite större resp. mindre s.a. båda har <u>samma</u> gränsv.

<u>Ex</u> Låt $g(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

om det existerar.

Om $f(x,y) = x^2+y^2$ och $h(t) = \dfrac{e^t-1}{t}$ så är

$g(x,y) = h(f(x,y))$. Eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$

får man enligt d):

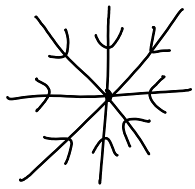
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

(enligt l'Hospitals regel, alt. standardgränsvärde, alt. def. av derivata av e^t i $t=0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-e^0}{h} = \frac{d}{dt}e^t\Big|_{t=0} = e^t\Big|_{t=0} = 1$$)

Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, så måste gränsvärdet av f när man närmar sig (a,b) längs <u>alla</u> linjer genom (a,b) vara L.

Sådana linjer ges av $\mathbf{r}(t) = \langle a+kt, b+lt\rangle$
Går mot (a,b) när $t\to 0$.



Ger metod att se när gränsv. <u>inte</u> existerar.

Ex Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ om det existerar.

$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Prövar längs: x-axeln: $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 0 \rangle$.

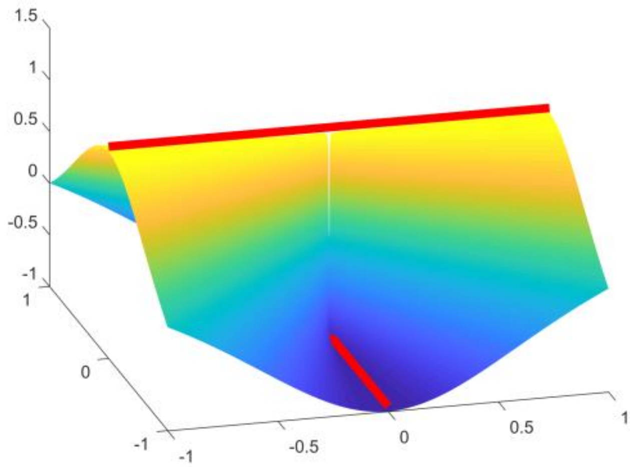
$$f(\mathbf{r}(t)) = f(t,0) = \frac{t^2-0}{t^2+0} = 1 \to 1 \text{ då } t \to 0.$$

y-axeln: $\mathbf{r}_2(t) = (0, t)$

$$f(\mathbf{r}_2(t)) = f(0,t) = \frac{0-t^2}{0+t^2} = -1 \to -1 \text{ då } t \to 0.$$

Alltså existerar gränsvärdet ej, eftersom får olika gränsv. längs olika linjer.

$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ är 1 längs x-axeln och -1 längs y-axeln



Obs: Denna strategi kan bara visa att gränsvärden inte existerar. Även om får samma gränsv. längs alla räta linjer, kan hända att gränsv. inte existerar, se t.ex. Ex 3 i avsn. 14.2

(Enkelt ex., får annat gränsv. om närmar sig längs parabel)

Def En funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

(viktigt krav, många resultat gäller bara för kont. funktioner. vanligt bland funktioner man "stöter på")

Säger att f är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om kontinuerlig i alla $(a,b) \in D$, och att f är kontinuerlig om den är det på hela sin definitionsmängd.

Från räkneregler för gränsv. får man att om $f(x,y)$, $g(x,y)$ och $h(t)$ är kontinuerliga så är $f+g$, $f \cdot g$, $h(f(x,y))$ kontinuerliga, och $\frac{f}{g}$ är kontinuerlig på $\{(x,y) \mid g(x,y) \neq 0\}$.

Ex a) x och $1+y^2$ är kont. (enkelt från def.)

b) $\frac{x}{1+y^2}$ är kont. (kvot av kont. funktioner)

c) $e^{\frac{x}{1+y^2}}$ är kont. (sammansättning av kont. fkt med kont. fkt $h(t)=e^t$)