LMA017, Föreläsning 4, 11/9

Sammanfattning Föreläsning 3

- Gränsvärde av funktioner $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ om
  "$f(x,y)$ kommer hur nära L som helst,
  så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b)" (informell definition)

- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M \Rightarrow$
  $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$

- $f(x,y)$ *kontinuerlig* i (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Ex Avgör om följande funktioner är kont. i $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

---

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ (förra föreläsn.)

så f är kont. i $(0,0)$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = 1 \neq 0 = g(0,0)$ (förra föreläsn.)

så g är inte kont. i $(0,0)$.

(men skulle bli det om istället hade att $g(0,0)=1$)

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ exist. ej (förra föreläsn.)

så h är inte kont. i $(0,0)$.

Partiella derivator 14.3

"Fixera alla variabler utom en och derivera som funktion av en variabel"

Def $f(x,y)$ funktion. Fixera y och låt $g(x) = f(x,y)$

Den partiella derivatan av f med avseende på x är

$$f_x(x,y) = g'(x)$$

och på samma sätt om x fix, $h(y) = f(x,y)$ så är

$$f_y(x,y) = h'(y).$$

Ex Beräkna $f_x(1,2)$ där $f(x,y) = e^{xy}$.

Låt $g(x) = f(x,2) = e^{2x}$.

$g'(x) = 2e^{2x}$

$$\Rightarrow \quad f'(1,2) = g'(1) = 2e^2.$$

(I praktiken, ser y som konstant, deriverar m.a.p. x och sätter till $(1,2)$, inför inte $g(x)$)

Använder också följande beteckningar:

$$f_x = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$$

(krokigt isf rakt d för skilja mot derivator av en variabel)

$$f_y = \ldots = f_2$$

Högre derivator:

Man kan derivera f_x och f_y m.a.p x och få

$$(f_x)_x,\ (f_y)_x,\ (f_y)_x,\ (f_y)_y \quad \text{osv.}$$

Man skriver $(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$ osv.

Clairaut's sats Om f_{xy} och f_{yx} båda existerar och är kontinuerliga nära (a,b) så är

$$f_{yx} = f_{xy}.$$

Bevis: Appendix F, använder medelvärdessatsen.

Högre ordningens partiella derivator kan t.ex. beskriva fysikaliska fenomen genom partiella differentialekvationer
(Diff. ekv. med partiella derivator)

T.ex. Laplace's ekvation $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{= f_{xx} + f_{yy}} = 0$
beskriver bl.a. värmeledning

Ex Visa att $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ löser Laplace's ekvation

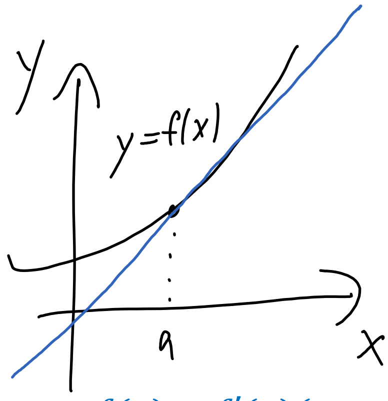
$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2) = 3x^2 - 3y^2$, $\quad f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y^2) = 6x$

$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2) = -6xy$, $\quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-6xy) = -6x$

så $f_{xx} + f_{yy} = 6x + (-6x) = 0.$

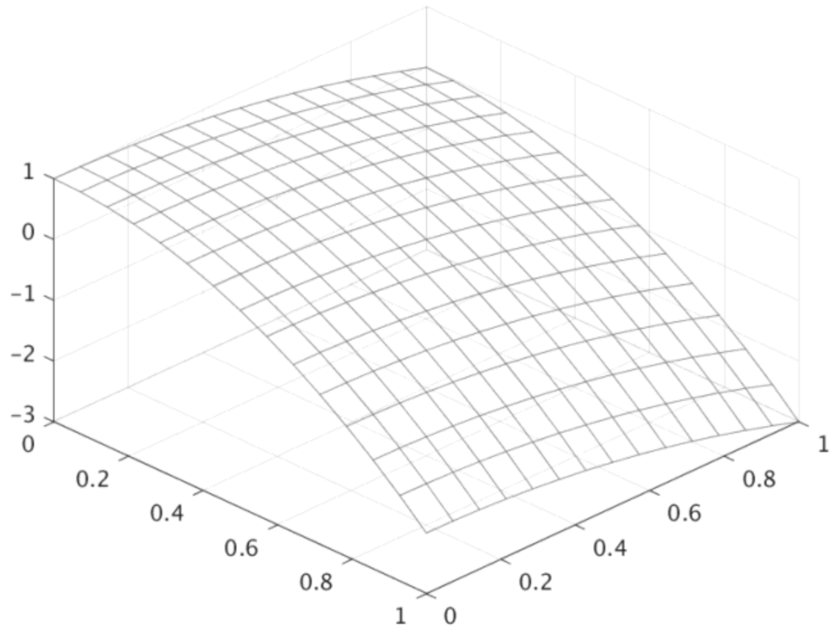
Tangentplan till en graf $z = f(x, y)$

Tangentlinje till graf $y = f(x)$ kring a är *"bästa approximation av f nära a med en linje"*



tangentlinje $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

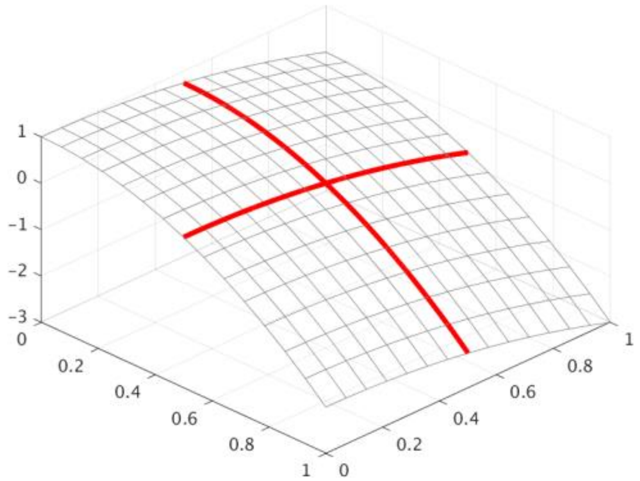
Vill göra motsvarande i två variabler:
Tangentplan till graf $z = f(x, y)$ kring (a, b) är *"bästa approximation av f nära (a,b) med ett plan"*



$z = f(x, y)$

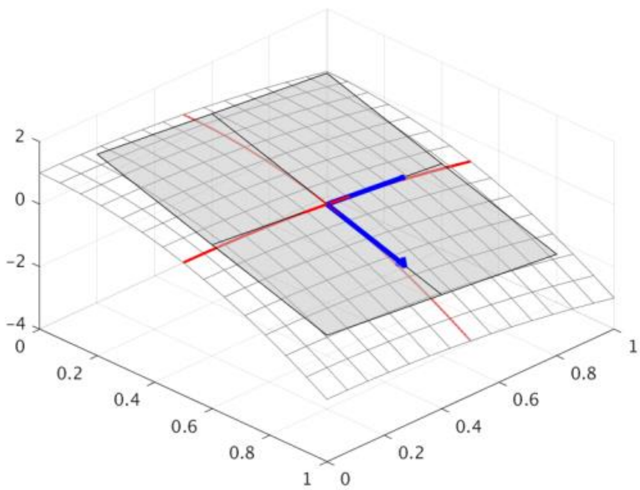
Fixera en punkt (a, b). Två naturliga kurvor genom (a, b) längs grafen $z = f(x, y)$ om fixerar a eller b:

$\boldsymbol{r}_1(x) = \langle x, b, f(x, b)\rangle$
$\boldsymbol{r}_2(y) = \langle a, y, f(a, y)\rangle$



Kurvor $\boldsymbol{r}_1$ och $\boldsymbol{r}_2$ där $x = 0{,}5$ eller $y = 0{,}5$ fixerade

Tangentvektorerna $\boldsymbol{r}_1'(a)$ och $\boldsymbol{r}_2'(b)$ bör kunna användas för att ge bra approximation av f längs $\boldsymbol{r}_1$ och $\boldsymbol{r}_2$



Tangentplanet till $z = f(x, y)$ i $(0.5, 0.5)$

Tangentplan och linearisering   14.4

Def Tangentplanet till grafen $z=f(x,y)$ vid (a,b) är det plan genom $(a, b, f(a,b))$ som innehåller vektorerna

$\mathbf{r}_1'(a)$ och $\mathbf{r}_2'(b)$, där

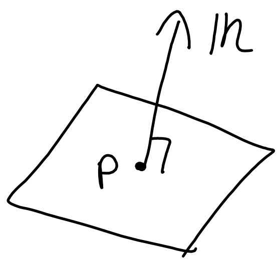
$$\mathbf{r}_1(x) = \langle x, b, f(x,b)\rangle \text{ och } \mathbf{r}_2(y) = \langle a, y, f(a,y)\rangle$$

Ska härleda explicit formel.

Påminnelse (Stewart, 12.4 & 12.5)

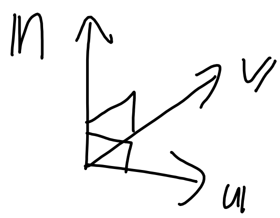
a) Ett plan med normalvektor $\mathbf{n} = \langle A, B, C\rangle$ genom en punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ ges av

$$\mathbf{n} \cdot \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle = A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$



b) Ett plan som innehåller två (icke-parallella) vektorer $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_2\rangle$ och $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ har normalvektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \langle u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1\rangle.$$



För tangentplanet:

$$\mathbf{r}_1'(a) = \langle 1, 0, f_x(a,b) \rangle$$
$$\mathbf{r}_2'(b) = \langle 0, 1, f_y(a,b) \rangle$$

normalvektor enl. b): $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1'(a) \times \mathbf{r}_2'(b) =$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(a,b) \\ 0 & 1 & f_y(a,b) \end{vmatrix} = \langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle.$$

(kommer komma tillbaka senare)

så enl. a) ges tangentplanet av:

$$\mathbf{n} \bullet \langle x-a, y-b, z-f(a,b) \rangle = 0 \iff$$
$$-f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + 1 \cdot (z - f(a,b)) = 0$$

vilket ger:

<u>Formel för tangentplanet av grafen $z = f(x,y)$</u>

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

---

z-värdet av (x,y,z) på tangentplanet bör vara bra approximation av $f(x,y)$ om (x,y) nära (a,b).
Ger <u>lineariseringen</u> av f kring (a,b):

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-b).$$

(tangentplanet blir då grafen till lineariseringen)

Ex Beräkna tangentplanet till $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ i $(3,4)$ och lineariseringen av f i $(3,4)$.

$$f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$$

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_x(3,4) = \frac{3}{5},$$

$$f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y(3,4) = \frac{4}{5}$$

Tangentplan: $z = \underbrace{5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)}_{= L(x,y) \text{ lineariseringen.}}$