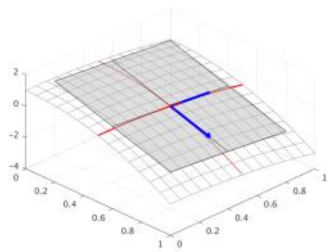
Sammanfattning Föreläsning 4

- **Partiella derivator**: $f_x(x,y) = f_x'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$
  "*se* y *som konstant och derivera m.a.p.* x"

  och $f_y(x,y) = f_y'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$

- **Tangentplan** för $z = f(x,y)$ kring (a,b)
  $z = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}_{=L(x,y) \quad \text{linearisering av } f}$



- Maple TA startar idag kl 13:00, stänger mån 24/9 kl 18:00
  - Ping Pong ->
  - Innehåll ->
  - Dugga 1 ->
  - (Läs informationen)
  - Öppna extern sida

Ex Använd lineariseringen av $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $(3,4)$ för att approximera $f(3{,}01,\ 3{,}98)$.

Såg förra föreläsningen:

$$L(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$$

$$f(3.01,\ 3.98) \approx L(3.01,\ 3.98) = 5 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}01 - \frac{4}{5}\cdot 0{,}02 = 4{,}99.$$

Verkligt värde: $f(3{,}01,\ 4{,}99) = 4{,}990040\ldots$, så ger bra approximation.

Idag: mer om när L ger bra approximation.

Differentierbarhet 14.4

Påminnelse I en variabel, om $f'(a)$ existerar, kan man visa (se föreläsningsanteckningar på kurshemsidan) att

$$f(x) = L(x) + \varepsilon(x) \cdot (x-a),$$

där $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ är lineariseringen av f kring a och $\varepsilon(x) \to 0$ när $x \to a$

Slutsats: Om $f'(a)$ existerar så är L en bra approximation av f nära a för $f(x) - L(x)$ går mot 0 snabbare än alla linjära funktioner.
(Och lineariseringen är den enda linjära funktion som uppfyller detta, så är bästa approximation av f med linjär funktion)

Förklaring till påst. ovan: Om löser ut $\varepsilon(x)$ ovan:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - L(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}} - f'(a).$$

Eftersom går mot $f'(a)$ när x går mot a enl. def. av derivata får man att $\varepsilon(x) \to f'(a) - f'(a) = 0$ när $x \to a$.

Annorlunda i två variabler:

$\underline{\text{Ex}}$ Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f(0,0) = 0, \quad f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$ så

linearisering kring $(0,0)$ är

$L(x,y) = 0$

$$f(t,t) - L(t,t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \underset{t \to 0}{\not\to} 0$$

så L är inte en bra approximation av f nära $(0,0)$
även om $f_x(0,0)$ och $f_y(0,0)$ existerar!

Många resultat bygger på att L är en bra approximation.
Inför därför:

$\underline{\text{Def}}$ f är <u>deriverbar</u> eller <u>differentierbar</u> i (a,b)
om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och man
kan skriva

$$f(x,y) = \overbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}^{L(x,y)} + \varepsilon_1(x,y)(x-a) + \varepsilon_2(x,y)(y-b)$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ då $(x,y) \to (a,b)$

Speciellt, $f(x,y) - L(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (a,b)$
så f i ex. ovan är <u>ej</u> differentierbar.

Sats Om $f_x(x,y)$ och $f_y(x,y)$ existerar och är kontinuerliga nära (a,b) så är f deriverbar i (a,b)

Beviset använder medelvärdessatsen för derivator i en variabel, se Appendix F.

(Deriverbarhet behövs för följande resultat)

Kedjeregeln 14.5

Påminnelse Kedjeregeln i en variabel:

Om $y=f(x)$ och $x=g(t)$ är deriverbara så är

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))\, g'(t).$$

Annorlunda uttryckt: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}$ (formellt kan förkorta med dx)

Kedjeregeln i två variabler (enklaste varianten)

Låt $z=f(x,y)$, $x=g(t)$, $y=h(t)$ vara deriverbara.

Då är $\frac{d}{dt} f(g(t),h(t)) = f_x(g(t),h(t))\, g'(t) + f_y(g(t),h(t))\, h'(t)$

eller kortare: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

(Kedjeregeln i flera variabler inte så viktig för beräkningar, men teoretiskt mycket viktig)

<u>Ex</u> Antag att f är deriverbar och att

$$f_x(2,2) = 7, \quad f_y(2,2) = -3.$$

Låt $u(t) = f(t^3+t, 2t)$ Vad är $u'(1)$?

Låt $g(t) = t^3+t$, $h(t) = 2t$ s.a. $u(t) = f(g(t), h(t))$.

$g'(t) = 3t^2+1$ $g'(1) = 4$, $h'(t) = 2$, $h'(1) = 2$

$$u'(1) = f_x(g(1,1), h(1,1))\, g'(1) + f_y(g(1), h(1))\, h'(1)$$

$$= 7 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 22.$$

<u>Bevis</u> Enl. def. av deriverbarhet av f, med $(x,y) = (g(s), h(s))$ och $(a,b) = (g(t), h(t))$, och om delar allt med $s-t$:

$$\frac{f(g(s),h(s)) - f(g(t),h(t))}{s-t} =$$

$$= f_x(g(t),h(t))\, \frac{g(s)-g(t)}{s-t} + f_y(g(t),h(t))\, \frac{h(s)-h(t)}{s-t}$$

$$+ \varepsilon_1 \cdot \frac{g(s)-g(t)}{s-t} + \varepsilon_2 \cdot \frac{h(s)-h(t)}{s-t}$$

Om låter $s \to t$, får kedjeregeln.

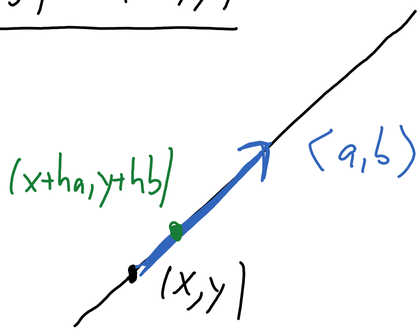
Riktningsderivator och gradienter 14.6

Partiella derivator är derivator längs linjer när x el. y konstant, dvs längs linjer med riktningsvektor $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ el. $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$.

Andra riktningar?

Def Riktningsderivatan (directional derivative) av $f(x,y)$ i riktningen $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$, där $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor ($\sqrt{a^2+b^2} = 1$) är

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x,y)}{h}$$



Anm: $f_x = D_{\mathbf{i}} f$, $f_y = D_{\mathbf{j}} f$

(Följande kommer användas i olika sammanhang framöver)

Def Gradienten av $f(x,y)$ är

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$$

("nabla f")

Sats Om f är deriverbar så är

$$D_u f = \nabla f \bullet u$$

Bevis: Låt $g(h) = f(x+ha, y+hb)$.

Enligt kedjeregeln:

$$g'(h) = f_x(x+ah, y+bh)a + f_y(x+ah, y+bh)b$$

så $\underbrace{g'(0)}_{=D_u f} = \underbrace{f_x(x,y)\cdot a + f_y(x,y)\cdot b}_{=\nabla f \bullet u}$

Ex Beräkna $D_u f(1,1)$ där $f(x,y) = x^2 y$ och u är enhetsvektorn $u = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$.

$$\nabla f = \langle 2xy, x^2 \rangle \qquad \nabla f(1,1) = \langle 2,1 \rangle$$

$$D_u f(1,1) = \nabla f(1,1) \bullet u = \langle 2,1 \rangle \bullet \langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2} \rangle = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$