Sammanfattning Föreläsning 5

- $f(x,y)$ **deriverbar** eller **differentierbar** i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och kan skriva
$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}_{=L(x,y)\ \text{ linearisering av } f} +$$
$$+\epsilon_1(x,y)(x-a) + \epsilon_2(x,y)(y-b)$$
där $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ då $(x,y) \to (a,b)$.

  Sats Om $f_x(x,y)$ och $f_y(a,b)$ existerar och är kontinuerliga nära (a,b) så är $f(x,y)$ deriverbar i (a,b)

- **Kedjeregeln i två variabel** (enklaste varianten)
Om $z = f(x,y)$ och $x = g(t)$ och $y = h(t)$ är deriverbara är
$$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t)\big) = f_x\big(g(t), h(t)\big)g'(t) + f_y\big(g(t), h(t)\big)h'(t)$$
alt:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
- **Gradient** $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$

- **Riktningsderivata** i riktning $\boldsymbol{u} = \langle a,b \rangle$ (enhetsvektor $\sqrt{a^2+b^2} = 1$):
$$D_{\boldsymbol{u}} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x,y)}{h}$$
$$= \nabla f(x,y) \cdot \boldsymbol{u} \text{ (av kedjeregeln)}$$

Variant av kedjeregeln: $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$
deriverbara

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

(Missade ta upp igår.
Följer av varianten från igår genom att betrakta
s resp. t som konstant.)

Riktningsderivata och gradienter (forts)

Påminnelse (12.3)

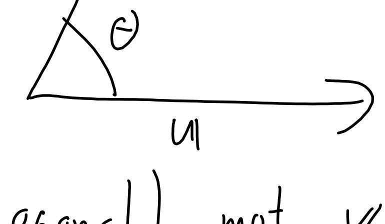
$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vektorer

a) skalärprodukt $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

(obs: ett tal, inte en vektor)

b) längden av $\mathbf{u}$ är $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

c) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$, θ vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.



d) $\mathbf{u}$ är vinkelrät (ortogonal) mot $\mathbf{v}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$

(följer av c))

Sats $D_u f(x,y)$ är som störst när u pekar i samma riktning som $\nabla f(x,y)$, dvs när $u = \dfrac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$

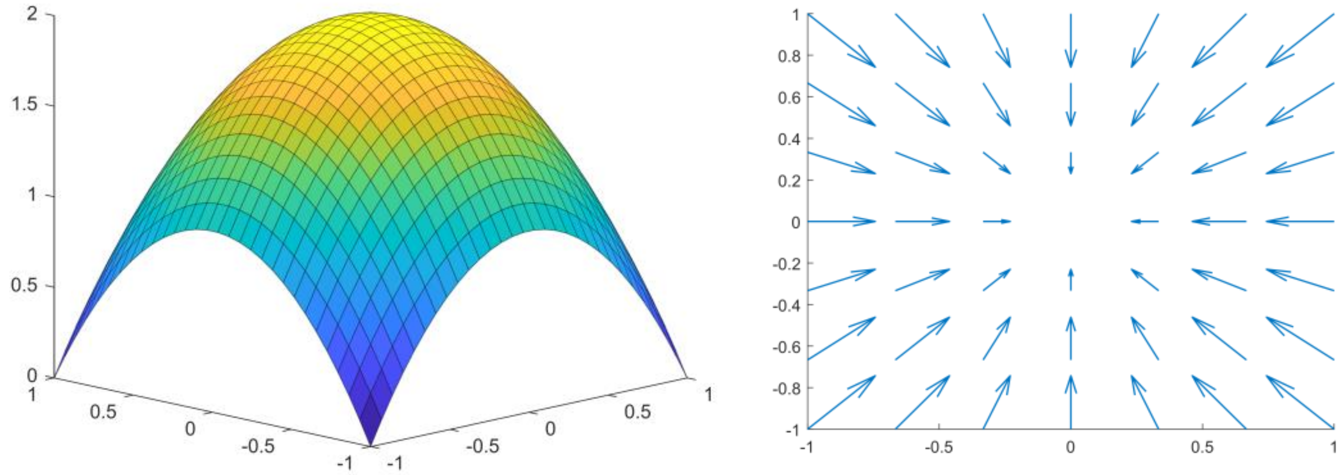
Alltså $f(x,y)$ växer som mest om (x,y) rör sig från (a,b) i riktningen $\dfrac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$

Bevis $$D_u f(x,y) = u \cdot \nabla f(x,y) \overset{c)}{=} \underbrace{|u|}_{=1} \, |\nabla f(x,y)| \cos\theta$$

där θ vinkeln mellan u och $\nabla f(x,y)$.

$|\nabla f(x,y)| \cos\theta$ blir som störst när $\cos\theta = 1$, dvs. när $\theta = 0$, s.a. u och $\nabla f(x,y)$ pekar i samma riktning.

Ex Graf och gradient till $2 - x^2 - y^2$



(växer mest när går mot origo)

Anm: I princip allt från denna veckan har naturliga generaliseringar till tre eller fler variabler (partiella derivator, kedjeregeln, riktningsderivator o.s.v.)

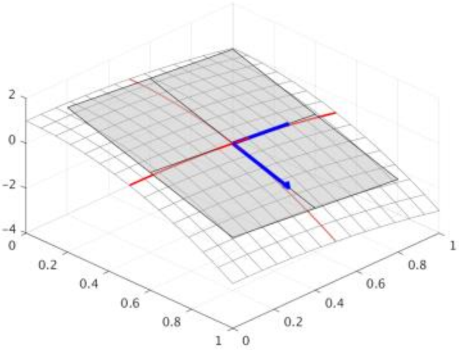
Tangentplan till nivåytor 14.6

Påminnelse

Definition *Tangentplanet* till $z = f(x,y)$ vid $(x,y) = (a,b)$ är det plan som går genom $(a,b,f(a,b))$ och som innehåller riktningsvektorerna $\boldsymbol{r}_1'(a)$ och $\boldsymbol{r}_2'(b)$ till kurvorna i grafen $\boldsymbol{r}_1(x) = \langle x, b, f(x,b)\rangle$ och $\boldsymbol{r}_2(y) = \langle a, y, f(a,y)\rangle$

Det ges av formeln:

$$\left\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \right\rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a,b)\rangle = 0$$



En graf $z = f(x,y)$ blir specialfall av nivåyta $F(x,y,z) = k$ om tar $F = z - f(x,y)$ och $k = 0$.

Skall nu def. tangentplan till allmän nivåyta.

(Har inte explicita kurvor i nivåytan som $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ i grafen)

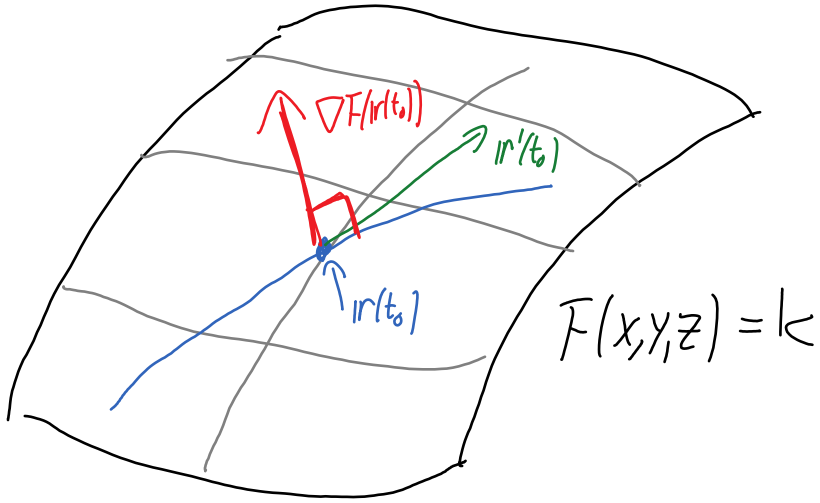
Vill definiera tangentplanet till $F(x,y,z) = k$ i (x_0, y_0, z_0) som det plan som innehåller (x_0,y_0,z_0) s.a. för varje kurva $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ i $F(x,y,z) = k$ s.a. $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ så innehåller tangentplanet $\mathbf{r}'(t_0)$.

Antag $\mathbf{r}$ sådan kurva. Då är $F(x(t), y(t), z(t)) = k$.

Deriverar båda sidor m.a.p. t och använder kedjeregeln:

$$\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial F}{\partial z}z'(t)=0 \iff \nabla F(\mathbf{r}(t))\bullet\mathbf{r}'(t)=0.$$

<u>Slutsats</u> $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ är vinkelrät mot $\mathbf{r}'(t_0)$



<u>Påminnelse:</u> Normalvektorn $\mathbf{n}$ till ett plan är vinkelrät mot alla vektorer i planet.
Om planet innehåller (x_0,y_0,z_0) ges det av

$$\mathbf{n}\bullet\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle=0.$$

<u>Def</u> <u>Tangentplanet</u> till en nivåyta $F(x,y,z)=k$ i en punkt (x_0,y_0,z_0) där $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ är

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\bullet\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle=0.$$

Gör att tangentplanet uppfyller vad vi ville.

(Att vad vi ville verkligen bestämmer tangentplanet bygger på att finns "tillräckligt många" sådana kurvor $\mathbf{r}$, vilket följer av implicita funktionssatsen som vi inte tar upp.)

<u>Obs:</u> Om $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ så är nivåytan $F(x,y,z) = 0$ samma som grafen $z = f(x,y)$

Eftersom $\nabla F = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ så blir tangentplanet till nivåytan $F=0$ i $(a,b,f(a,b))$ samma som tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$ i (a,b):

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + 1\cdot(z - f(a,b)) = 0$$

<u>Ex</u> Bestäm tangentplanet till sfären $x^2+y^2+z^2=1$ i punkten (a,b,c) där $a^2+b^2+c^2=1$.

Sfären är nivåytan $F=1$ där $F = x^2+y^2+z^2$.

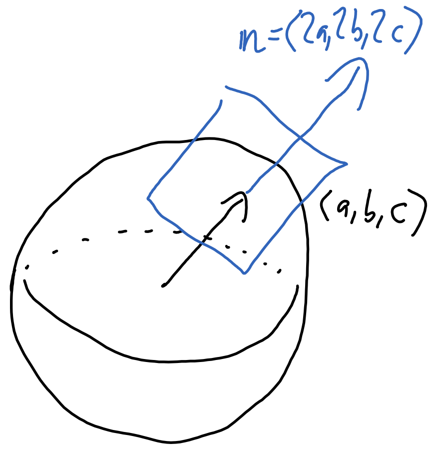
$\nabla F(x,y,z) = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$, så $\nabla F(a,b,c) = \langle 2a, 2b, 2c \rangle$

Tangentplan:

$$\langle 2a, 2b, 2c \rangle \bullet \langle x-a, y-b, z-c \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}a(x-a) + \cancel{2}b(x-b) + \cancel{2}c(z-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz = a^2+b^2+c^2 = 1$$



(Nu gått igenom allt som behövs för duggan)

Lokala extremvärden 14.7

Def $f(x,y)$ har ett lokalt maximum i (a,b) om

$$(*) \quad f(x,y) \le f(a,b)$$

för (x,y) nära (a,b) (dvs det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b))

$f(x,y)$ har ett globalt eller absolut maximum i (a,b) om $(*)$ gäller för alla (x,y) i def. mängden till f.

Lokala och globala/absoluta minimum definieras analogt från omvända olikheten

$$f(x,y) \ge f(a,b)$$

Ett extremvärde är ett minimum eller maximum.

Ex $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ har ett lokalt och globalt minimum i $(0,0)$ för $f(x,y) \ge 0 = f(0,0)$ för alla (x,y).

Påminnelse I en variabel, om $f(x)$ deriverbar och f har lokalt extremvärde i a så är $f'(a) = 0$.

Sats Om $f(x,y)$ har ett lokalt extremvärde i (a,b) och $f_x'(a,b)$ och $f_y'(a,b)$ existerar så är

$$f_x(a,b)=0 \quad \text{och} \quad f_y(a,b)=0.$$

Bevis $h(x)=f(x,b)$ har lok. extremvärde i $x=a$, så $h'(a)=0$, och $h'(a)=f_x(a,b)$ så

$$f_x(a,b)=0.$$

$f_y(a,b)=0$ visas analogt.

Def Om $f_x(a,b)=0=f_y(a,b)$ säger man att f har en kritisk punkt eller stationär punkt i (a,b)