Sammanfattning Föreläsning 5

- $f(x,y)$ **deriverbar** eller **differentierbar** i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och kan skriva

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}_{=L(x,y) \quad \text{linearisering av } f} +$$

$$+\epsilon_1(x,y)(x-a) + \epsilon_2(x,y)(y-b)$$

där $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ då $(x,y) \to (a,b)$.

Sats Om f_x och f_y existerar är kontinuerliga nära (a,b) så är $f(x,y)$ deriverbar i (a,b)

- **Kedjeregeln i två variabel** (enklaste varianten)

  Om $z = f(x, y)$ och $x = g(t)$ och $y = h(t)$ är deriverbara är

  $$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t)\big) = f_x\big(g(t), h(t)\big)g'(t) + f_y\big(g(t), h(t)\big)h'(t)$$

  alt:

  $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

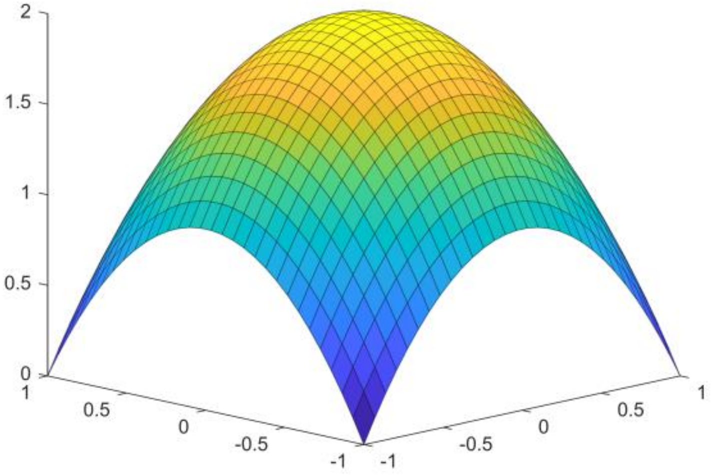
- **Gradient** $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$

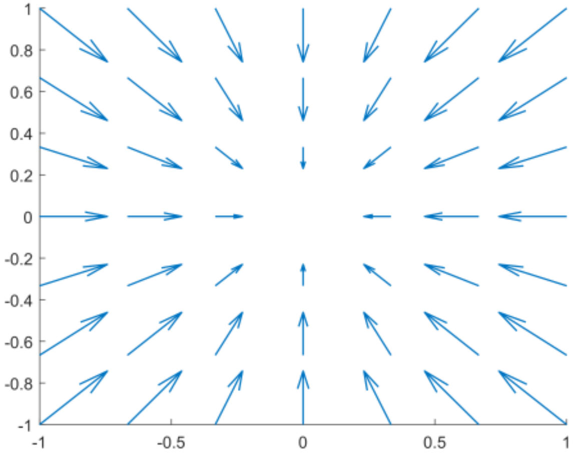
- **Riktningsderivata** i riktning $\boldsymbol{u} = \langle a, b \rangle$ (enhetsvektor $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$):

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h}$$

$$= \nabla f(x, y) \cdot \boldsymbol{u} \text{ (av kedjeregeln)}$$

Graf och gradient till $2 - x^2 - y^2$





Definition *Tangentplanet* till $z = f(x, y)$ vid $(x, y) = (a, b)$ är det plan som går genom $(a, b, f(a, b))$ och som innehåller riktningsvektorerna $\boldsymbol{r}_1'(a)$ och $\boldsymbol{r}_2'(b)$ till kurvorna i grafen $\boldsymbol{r}_1(x) = \langle x, b, f(x, b)\rangle$ och $\boldsymbol{r}_2(y) = \langle a, y, f(a, y)\rangle$

Det ges av formeln:

$$\left\langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \right\rangle \cdot \left\langle x - a, y - b, z - f(a, b) \right\rangle = 0$$