Sammanfattning Föreläsning 6

- **Sats** Riktningsderivatan $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y)$ är störst när $u = \frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$

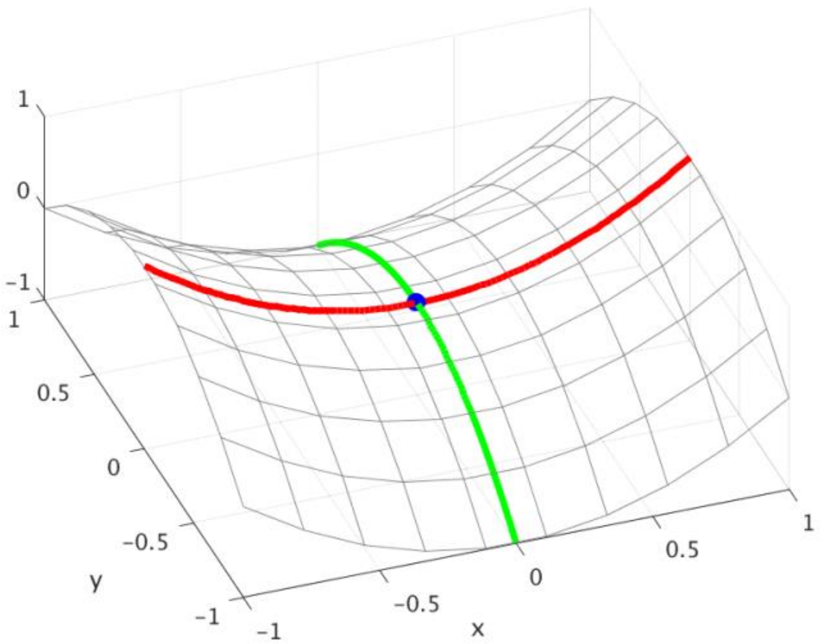
- *Tangentplanet till nivåytan* $F(x,y,z) = k$ i punkten (x_0,y_0,z_0) ges av
$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$

- **Sats** Punkter (a,b) med *lokala* extremvärden (lokala max/min) till $f(x,y)$ är *kritiska punkter, dvs.*
$$f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) = 0$$

Lokala extremvärden (forts.)

Alla lokala extremvärden är kritiska punkter (om partiella derivatorna existerar), men kritiska punkter är inte alltid extremvärden. Kritiska punkter som varken är lokala max. eller min. kallas sadelpunkter.

Ex $f(x,y) = x^2 - y^2$ har en sadelpunkt i $(0,0)$ för $\nabla f(x,y) = \langle 2x, 2y \rangle$ så $(0,0)$ en kritisk punkt, men är varken lok max eller min. Grafen har formen av en "sadel".



Grafen till
$z = x^2 - y^2$

lokalt min
längs x-axeln,

lokalt max
längs y-axeln

Hur avgöra om kritiska punkter är lokala extremvärden?

Påminnelse: I en variabel, om $f'(a)=0$ och

a) $f''(a)>0$ så har $f(x)$ lok. min. i $x=a$ (ex. x^2)

b) $f''(a)<0$ så har $f(x)$ lok. max. i $x=a$ (ex. $-x^2$)

(c) $f''(a)=0$ ger inte information, ex. $x^3, \pm x^4$ sadelpkt resp. min/max.)

Sats Antag de partiella derivatorna av ordning 2 till $f(x,y)$ är kontinuerliga nära (a,b) och att
$f_x(a,b)=0=f_y(a,b)$ (dvs. (a,b) är en kritisk punkt)

Låt $D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$

a) Om $D>0$ och $f_{xx}(a,b)>0$ (eller $f_{yy}(a,b)>0$) så har f ett lok. min i (a,b).

b) Om $D>0$ och $f_{xx}(a,b)<0$ (eller $f_{yy}(a,b)<0$) så har f ett lok. max i (a,b).

c) Om $D<0$ är (a,b) en sadelpunkt.

d) Om $D=0$ ger testet ingen information.

(Om $D>0$ så har f_{xx} och f_{yy} samma tecken och är inte 0)

Eftersom $f_{xy}=f_{yx}$ (Clairaut's sats) så är

$D=\det H$, där H är <u>Hessianmatrisen</u> $H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

Beviset går ut på att reducera till testet i en variabel se s. 967.

För att komma ihåg vilket villkor ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$ lok. min. i $(0,0)$

$D = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.

b) $f(x,y) = -x^2-y^2$ lok. max. i $(0,0)$

$D = (-2)(-2) - 0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = -2 < 0$.

c) $f(x,y) = x^2-y^2$ sadelpunkt i $(0,0)$,

$D = 2\cdot(-2) - 0\cdot 0 = -4 < 0$.

<u>Ex</u> Bestäm de kritiska punkterna till

$$f(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^3$$

och avgör ifall de är lok. max./min. eller sadelpunkter.

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} f_x = 6x + 6y = 0 \iff x = -y & (1) \\ f_y = 6x - 3y^2 = 0 \iff 2x - y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Sätter in (1) i (2):

$$-2y - y^2 = 0 \iff -y(2+y) = 0 \iff y = 0 \text{ el. } y = -2.$$

Sätter in dessa lösn. i (1): $\quad y = 0 \Rightarrow x = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ y = -2 \Rightarrow x = 2.$

Kritiska punkter: $(0,0)$ och $(2,-2)$

Undersöker kritiska punkter:

$$f_{xx} = 6 \qquad f_{xy} = 6 \qquad f_{yy} = -6y$$

<u>$(0,0)$:</u> $\quad D(0,0) = \det H(0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ är en sadelpunkt.

<u>$(-2,2)$:</u> $\quad D(-2,2) = \det H(-2,2) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 6 \cdot 6 > 0$

och $f_{xx}(-2,2) = 6 > 0 \Rightarrow (-2,2)$ är ett lokalt min.

(En av få saker i kursen som inte generaliserar lätt till fler variabler om inte formulerar om det.)

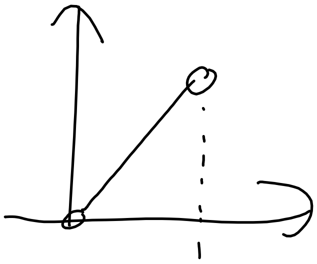
Det finns en generalisering till fler variabler som bygger på s.k. egenvärden till Hessianmatrisen. Egenvärden ingår i "Matematisk överbryggningskurs".

Globala extremvärden 14.7

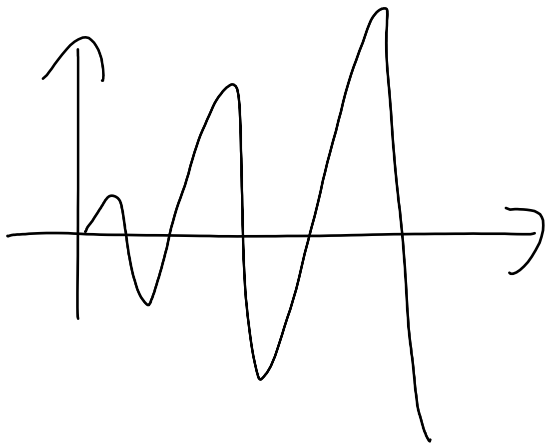
I en variabel, om $f(x)$ kontinuerlig på slutet begränsat intervall $[a,b]$ så har f globalt max och min där.

Gäller ej för t.ex. öppna eller obegränsade intervall:

$f(x) = x, \quad x \in (0,1)$

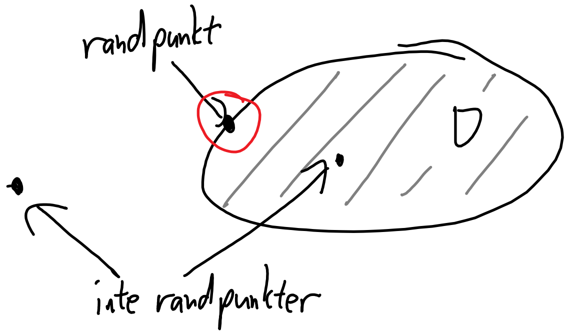


$f(x) = x \sin x, \quad x \in [0, \infty)$



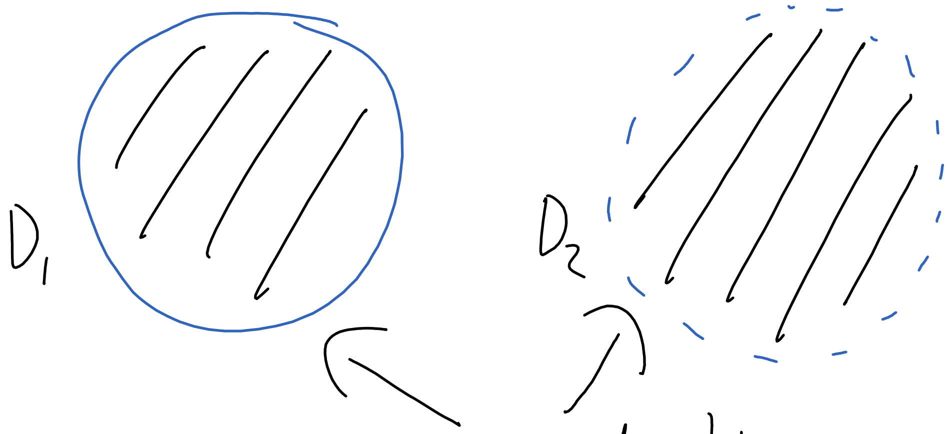
Skall nu def. motsvarighet till sluten och begränsad i två variabler

Def (a,b) är en randpunkt (boundary point) till en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje cirkelskiva kring (a,b) innehåller både punkter i D och punkter som inte är i D.



Ex Randpunkter till $D_1 = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ är $\{x^2+y^2=1\}$

— // — $D_2 = \{x^2+y^2<1\}$ är också $\{x^2+y^2=1\}$



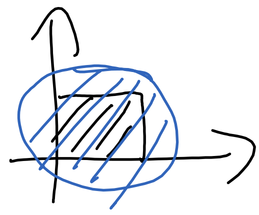
Def En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är sluten om den innehåller alla sina randpunkter.

I exemplet ovan är D_1 sluten, men D_2 är inte sluten

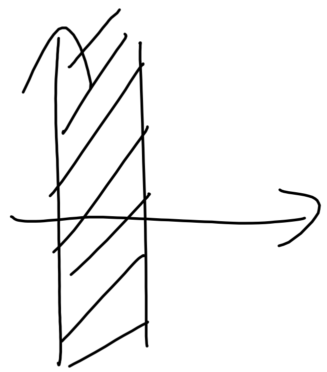
[tumregel, om def. med $\leq, \geq$ eller $=$, blir i allmänhet sluten, men typiskt inte om def. med $<$ eller $>$.]

Def En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är begränsad om den är innehållen i någon cirkelskiva.

<u>Ex</u> $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ är begränsad



$\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1\}$ är ej begränsad

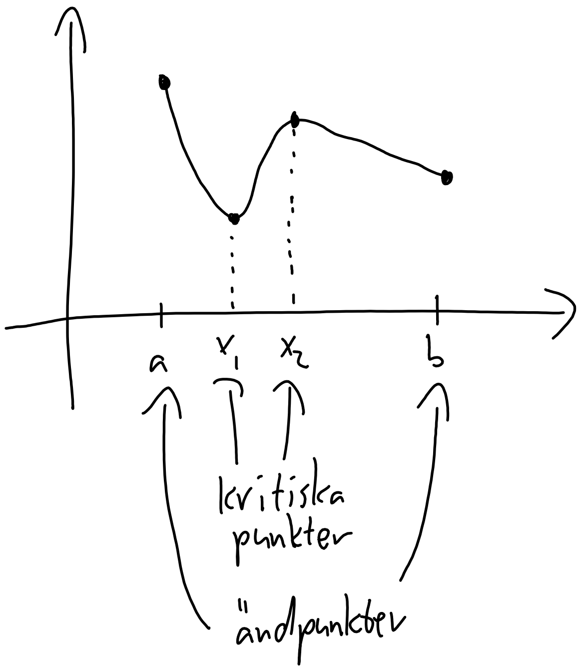


("oändlig i y-led")

<u>Sats</u> Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och D är sluten och begränsad då har f globalt max och min på D.

("djupt resultat", bygger på fundamentala egenskaper för reella tal.)

Påminnelse: Om $f(x)$ deriverbar på ett slutet intervall $[a,b]$ så har f globalt max och min på $[a,b]$, och de kan bestämmas genom att jämföra funktionsvärden $f(x)$ i ändpunkter $x=a$, $x=b$, och kritiska punkter $f'(x)=0$.



a, x_1, x_2, b kandidater till max och min.

(här, max i a och min i x_1)