Sammanfattning Föreläsning 7

- **Andraderivatatestet för lokala extremvärden**
  $f(x,y)$ kontinuerliga partiella derivator ordning 2, låt
  $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$

Om $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$ *(dvs* (a,b) *en kritisk punkt)* och

a) $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$, då är (a,b) ett lokalt min
b) $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$, då är (a,b) ett lokalt max
c) $D < 0$, då är (a,b) en sadelpunkt
d) $D = 0$, då ger testet ingen information

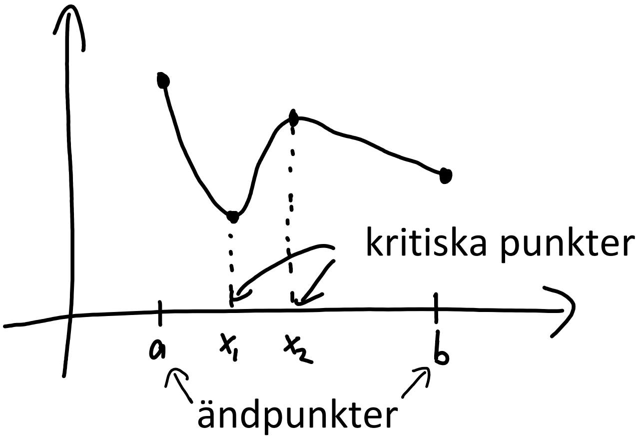
Randpunkter till en mängd D är punkter (x,y) i $\mathbb{R}^2$ s.a. varje cirkelskiva kring (x,y) innehåller både punkter från D och punkter ej i D

D är **sluten** om den innehåller alla sina randpunkter

D är **begränsad** om den är innehållen i någon cirkelskiva

Sats Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är sluten och begränsad, då har f ett globalt max och min på D.

<u>Påminnelse</u>: Om $f(x)$ deriverbar på ett slutet intervall $[a,b]$ så har f ett globala max och min på $[a,b]$ och de kan bestämmas genom att jämföra funktionsvärden $f(x)$ i ändpunkter $x=a, x=b$ och i kritiska punkter $f'(x)=0$



a, x_1, x_2, b
kandidater till max och min

<u>Globala extremvärden</u> (forts.)

Om $f(x,y)$ har ett globalt max i $(a,b)\in D$, och (a,b) inte är en randpunkt så måste det vara ett lokalt max och därmed en kritisk punkt.

(Satsen om lok. extremvärden och kritiska punkter hade som förutsättning att part. derivator existerar, vilket de ej gör i randpunkter)

Ger följande:

<u>Metod för att bestämma globala max och min</u> för f en deriverbar funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D sluten och begränsad.

Globala max och min fås genom att jämföra funktionsvärden i följande kandidater:

1) Kritiska punkter i D.

2) Randpunkter till D.

Om man parametriserar randpunkterna till D med kurvor räcker det med följande kandidater i 2):

2.1) Kritiska punkter när man ser f som funktion av en variabel längs randkurvor.

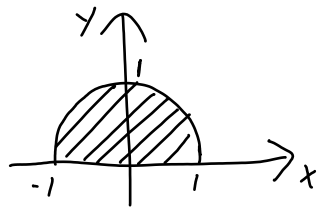
2.2) Hörn, dvs. ändpunkter till randkurvorna.

<u>Ex</u> Beräkna globala max och min till

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - y$$

på området $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

Området är en halvcirkelskiva som är sluten och begränsad. Kan använda metoden ovan.

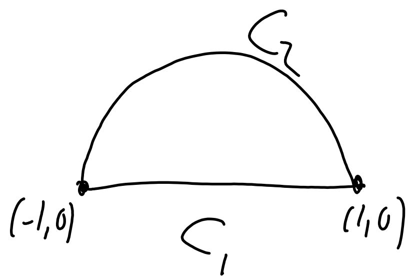


1) Kritiska punkter i D:

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \quad \left(\text{obs! ligger i } D\right)$$

Kandidat: $\boxed{f\left(0,\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}}$

2) Parametriserar randen:



C_1: $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle$, $-1 \leq t \leq 1$

C_2: $\mathbf{r}_2(t) = \langle \cos t, \sin t\rangle$, $0 \leq t \leq \pi$

(eller t.ex. $\mathbf{r}_2(x) = \langle x, \sqrt{1-x^2}\rangle$)

2.1) Kritiska punkter längs randkurvor:

C_1: $g_1(t) = f(r_1(t)) = f(t,0) = t^2$

Kritiska punkter: $g_1'(t) = 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Kandidat: $\boxed{g_1(0) = f(0,0) = 0}$

$\underline{C_2}$: $g_2(t) = f(\cos t, \sin t) = \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} - \sin t = 1 - \sin t$

$g_2'(t) = -\cos t = 0 \underset{(0 \le t \le \pi)}{\Leftrightarrow} t = \pi/2$

Kandidat: $\boxed{g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0,1) = 0}$

2.2) Hörn

Kandidater

$f(-1,0) = 1$
$f(1,0) = 1$

Globalt min $-\frac{1}{4}$ i $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

— " — max $\underline{1}$ i $(\pm 1, 0)$

Optimering under bivillkor, Lagrangemultiplikatorer 14.8

Ska lösa följande problem:

Beräkna max av $4x^2+4y$ när (x,y) ligger på enhetscirkeln $x^2+y^2=1$.

En möjlighet: Parametrisera enhetscirkeln, $r(t)=\langle \cos t, \sin t\rangle$ och hitta max av $h(t)=f(r(t))=4\cos^2 t+4\sin t$.
(på form som löser i envarkursen)

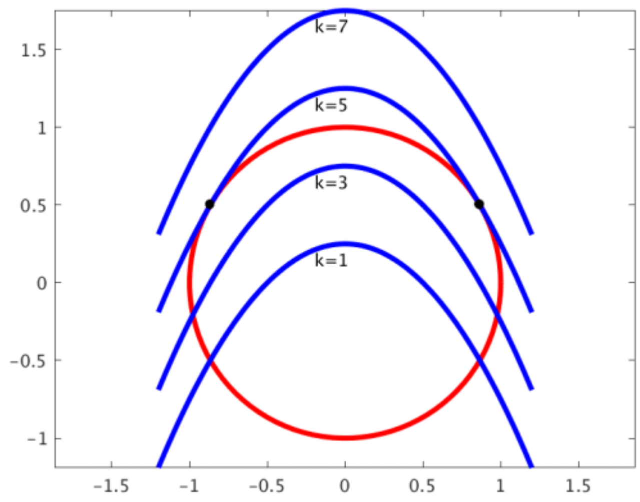
Annan möjlighet: Se som fall av följande:

Optimering under bivillkor $f(x,y)$, $g(x,y)$ def. på D.

Vill hitta max och min av $f(x,y)$ på D under förutsättning att $g(x,y)=k$.

Villkoret $g(x,y)=k$ kallas ett bivillkor (constraint)

Max av $f(x, y)$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$ är det största värdet k på en nivåkurva $f(x, y) = k$ som skär $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$

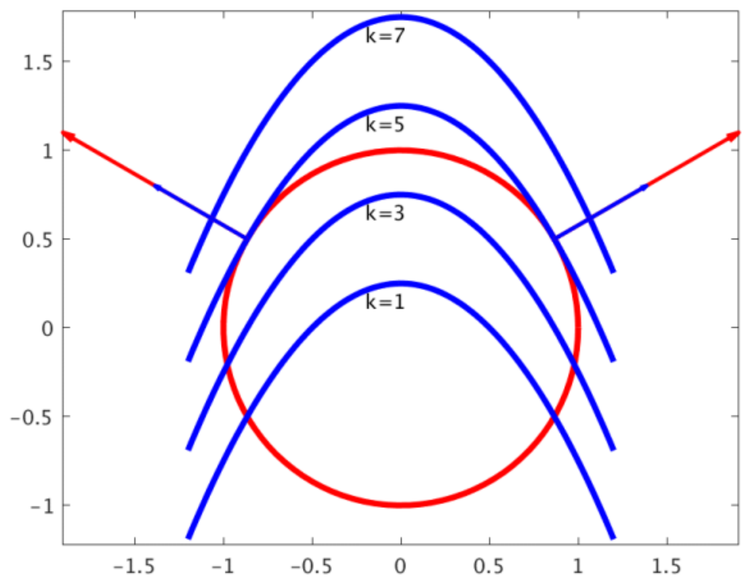


Från bilden får man att största värdet på $f(x, y)$ är 5

(när $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$)

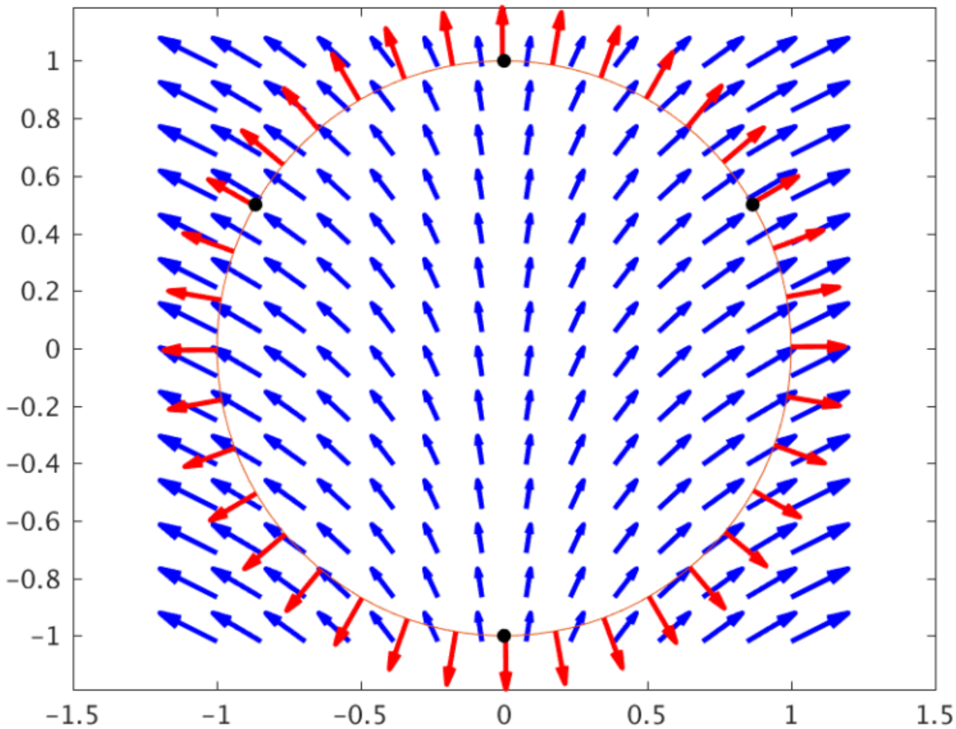
Ser ut som nivåkurvan $f(x, y) = 5$ och kurvan $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ som bestämmer bivillkoret har samma tangentlinje i maxpunkten

Tangentlinjerna är parallella om normallinjerna (som är vinkelräta mot tangentlinjerna) pekar i samma riktning. Riktningen av normallinjer bestäms av ∇f och ∇g.



(Gradienterna i grafen är omskalade)

Optimering med Lagrangemultiplikatorer: Leta efter max av $f(x, y)$ när $g(x, y) = k$ i punkter (x, y) där ∇f och ∇g är parallella.



Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att hitta max och min till $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)=k$:
(under förutsättning att extremvärden finns och att $\nabla g(x,y)\neq 0$ på $g(x,y)=k$)

a) Hitta alla lösningar (x,y) till

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=k \end{cases}$$

för något λ. (λ kallas Lagrangemultiplikator)

b) Jämför $f(x,y)$ för alla lösningar (x,y) från a). Det största värdet ger max och det minsta värdet ger min.

Anm: Förutsättningen att extremvärden finns är uppfyllt om $g(x,y)=k$ är sluten och begränsad, t.ex. om det är en cirkel eller ellips. Kommer bara studera problem där det finns extremvärden.

Ex Hitta max och min till $f(x,y) = 4x^2 + 4y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Enligt metoden, löser först:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x \iff x = 0 \text{ el. } \lambda = 4 & (1) \\ 4 = \lambda \cdot 2y & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$x = 0 \underset{(3)}{\Rightarrow} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \underset{(2)}{\Rightarrow} \lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2$$

Kontrollera att ger lösn. $(x,y,\lambda) = (0,1,2)$ och $(0,-1,-2)$ (inte viktigt vad λ är, men viktigt att finns något λ för givet x och y)

$$\lambda = 4 \underset{(2)}{\Rightarrow} y = \frac{4}{2\lambda} = \frac{1}{2} \underset{(3)}{\Rightarrow} x^2 + \frac{1}{4} = 1 \iff x^2 = \frac{3}{4} \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kontrollera att ger lösn. $(x,y,\lambda) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$

Får följande lösningar

(x,y)	$f(x,y)$
$(0,1)$	4
$(0,-1)$	-4
$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5$
$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	5

Max är 5 : $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

Min är -4 : $(0,-1)$

(Såg detta i bilderna förut)