Sammanfattning Föreläsning 7

- **Andraderivatatestet för lokala extremvärden**
  $f(x, y)$ kontinuerliga partiella derivator ordning 2,
  låt $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$

  Om $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$ *(dvs* (a,b) *en kritisk punkt)* och

a) $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$, då är (a,b) ett lokalt min
b) $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$, då är (a,b) ett lokalt max
c) $D < 0$, då är (a,b) en sadelpunkt
d) $D = 0$, då ger testet ingen information

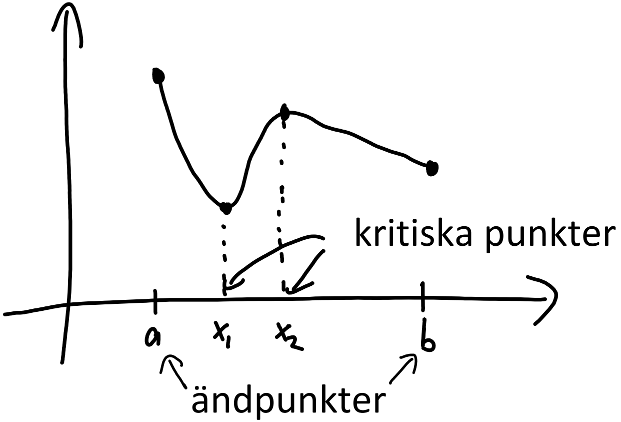
Randpunkter till en mängd D är punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ s.a. varje cirkelskiva kring (x, y) innehåller både punkter från D och punkter ej i D

D är **sluten** om den innehåller alla sina randpunkter

D är **begränsad** om den är innehållen i någon cirkelskiva

Sats Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är sluten och begränsad, då har f ett globalt max och min på D.

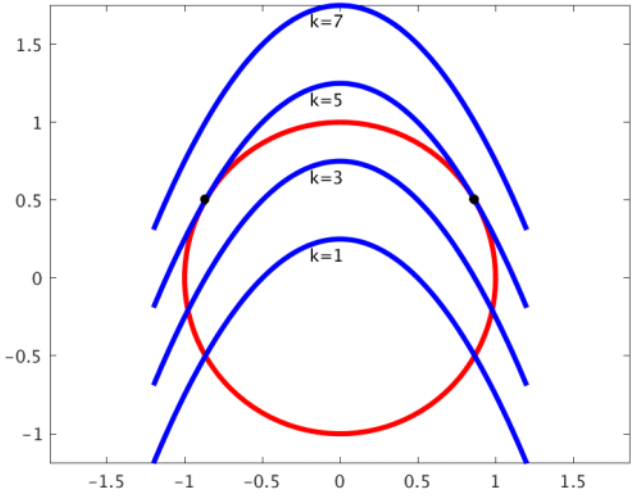
Påminnelse Om $f(x)$ deriverbar på ett slutet intervall $[a,b]$ så har f ett globala max och min på $[a,b]$ och de kan bestämmas genom att jämföra funktionsvärden $f(x)$ i ändpunkter $x=a, x=b$ och i kritiska punkter $f'(x)=0$



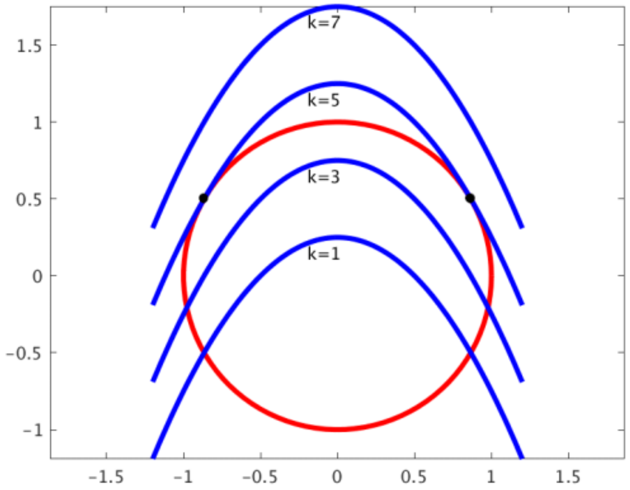
a, x_1, x_2, b
kandidater till max och min

Max av $f(x, y)$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$ är det största värdet k på en nivåkurva $f(x, y) = k$ som skär

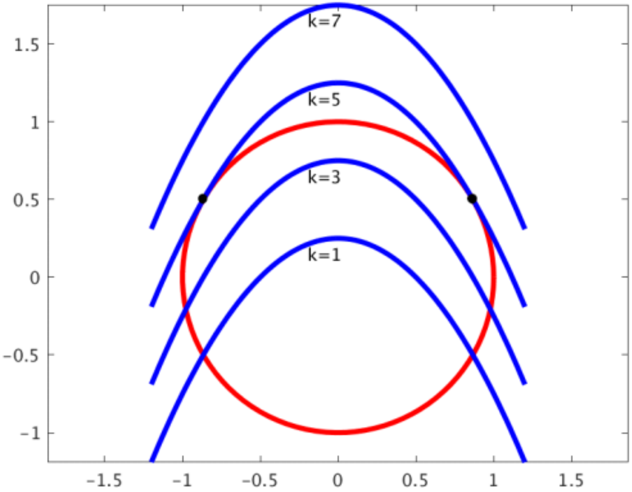
$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$$



Från bilden får man att största värdet på $f(x, y)$ är 5 (när $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$)

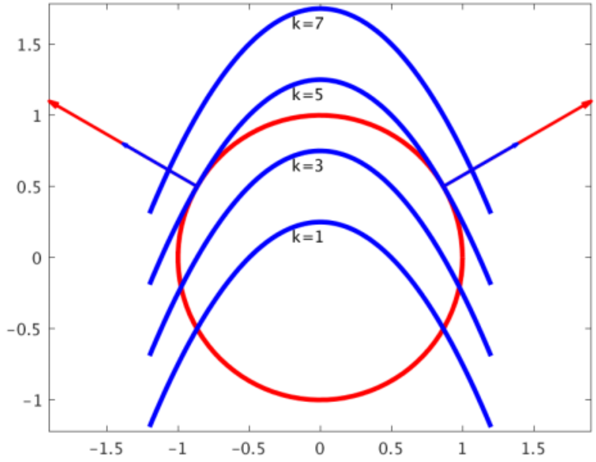


Ser ut som nivåkurvan $f(x, y) = 5$ och kurvan $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ som bestämmer bivillkoret har samma tangentlinje i maxpunkten



Tangentlinjerna är parallella om normallinjerna (som är vinkelräta mot tangentlinjerna) pekar i samma riktning. Riktningen av normallinjer bestäms av ∇f och ∇g.

(Gradienterna i grafen är omskalade)



Optimering med Lagrangemultiplikatorer: Leta efter max av $f(x, y)$ när $g(x, y) \; = \; k$ i punkter (x, y) där ∇f och ∇g är parallella.