Sammanfattning Föreläsning 8

Metod för att bestämma max och min till $f(x, y)$,
där $f(x, y)$ deriverbar på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D sluten och begränsad:

Max och min till f får man genom att jämföra funktionsvärdena i
1) Kritiska punkter till f i D
2) Randpunkter till D
   Detta kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:
   2.1) Kritiska punkter när ser f som funktion av en variabel längs randkurvor
   2.2) Hörn, dvs. ändpunkter till randkurvorna

Optimering med bivillkor - Metoden med Lagrangemultiplikatorer:

För att hitta extremvärden till $f(x, y)$ under bivillkoret att $g(x, y) = k$ *(om extremvärden finns och* $\nabla g(x, y) \neq 0$ *på* $g(x, y) = k$*):*

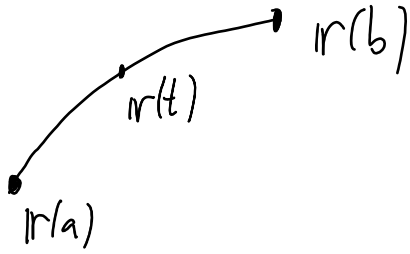
1) Hitta alla lösningar (x, y) till $\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$ för någon konstant λ.
2) Beräkna $f(x, y)$ för alla lösningar från 1). Det största värdet ger maximum och det minsta minimum.

Längd av kurvor i planet och rummet 10.2 & 13.3

Antag har kurva med parametrisering $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$.

Skall motivera snart att längden av kurvan ges av

$$\ell = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$



Ex Beräkna längden av kurvan som ges av

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle, \quad 0 \le t \le 1.$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{t^2(4+9t^2)}$$

$$\underset{(t \ge 0)}{=} t\sqrt{4+9t^2}$$

så $\ell = \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} s = 4+9t^2 \\ ds = 18t\,dt \\ t=0 \Rightarrow s=4 \\ t=1 \Rightarrow s=13 \end{array} \right\}$

$$= \int_4^{13} \underbrace{\sqrt{s}}_{=s^{1/2}} \frac{ds}{18} = \frac{1}{18}\left[\frac{s^{3/2}}{3/2}\right]_4^{13} = \frac{1}{27}\left(13^{3/2} - \underbrace{4^{3/2}}_{=8}\right)$$

En graf $y = f(x)$ är ett specialfall av en kurva och kan parametriseras $\mathbf{r}(x) = \langle x, f(x) \rangle$.

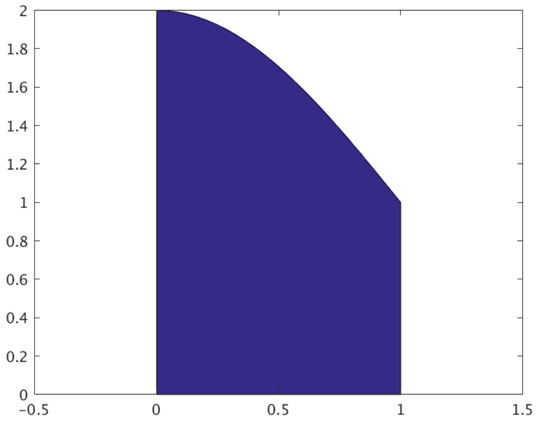
Då blir $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, så längden ges av

$$l = \int^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

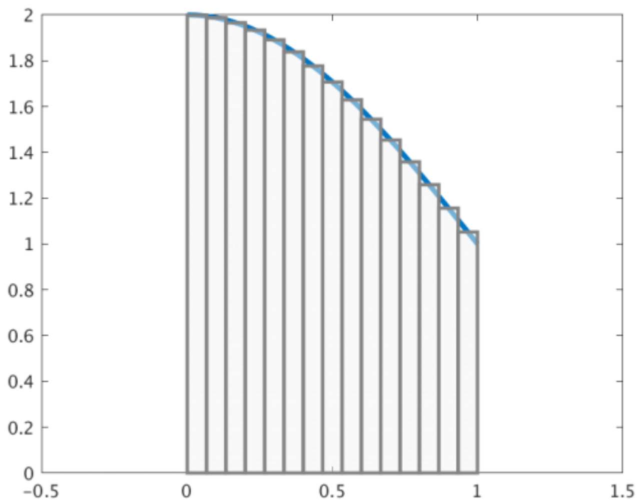
Detta specialfall finns i avsnitt 8.1.

Integraler i en variabel

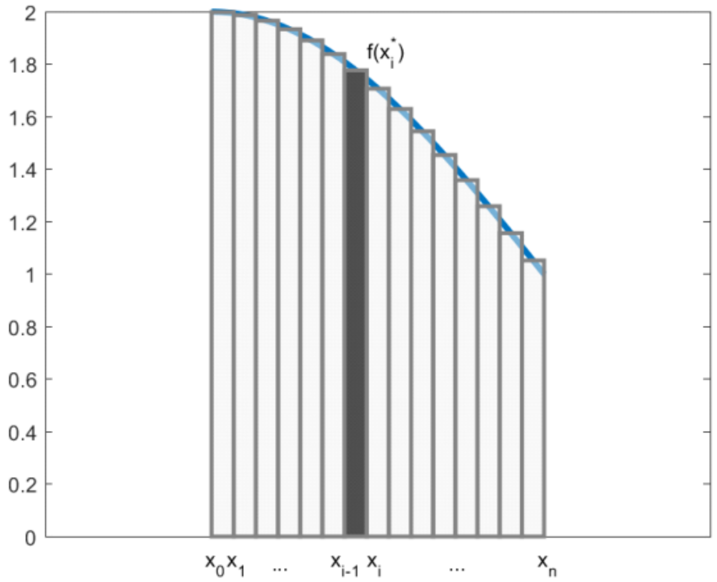
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$"Arean under grafen $f(x)$"



Integraler definierade genom att approximera grafen med rektanglar, beräkna arean av rektanglarna och gå i gräns med finare och finare indelning



Gör indelning $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, väljer punkter $x_{i-1} \le x_i^* \le x_i$ och skapar rektanglar mellan x_{i-1} och x_i i x-led och mellan 0 och $f\left(x_i^*\right)$ i y-led.

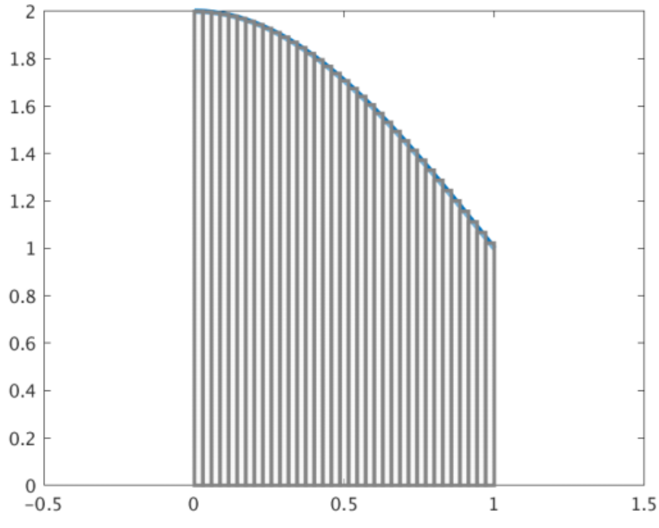


Arean av rektangel nr *i*: $f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$
Area av alla rektanglar (kallas en Riemannsumma för f)

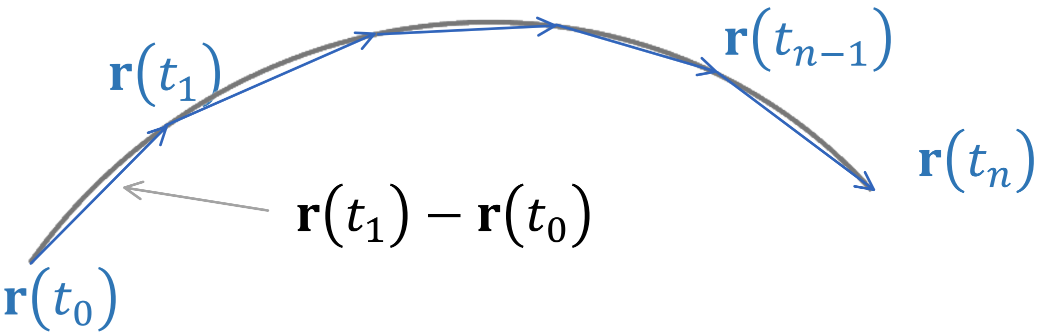
$$f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f(x_1^*)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$$

där gränsvärdet är att man tar finare och finare indelningar (dvs längden av delintervallen går mot 0)



För att beräkna längd av kurva $\mathbf{r}(t)$ mellan $t = a$ och $t = b$, approximerar kurvan med räta linjer, beräknar längden och går i gräns:



Total längd: $|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$

Härleder formel för gränsvärdet av längden
$|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$
när $n \to \infty$ i specialfallet $\mathbf{r}(t) = \langle t, f(t) \rangle$:

Enligt medelvärdessatsen:
$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$ för något $t_{i-1} \le t_i^* \le t_i$

$$|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}$$
$$= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}))^2} = \sqrt{1 + f'(t_i^*)^2}(t_i - t_{i-1})$$

Vi ersätter varje term i totala längden
$|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$
med $|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sqrt{1 + f'(t_i^*)^2}(t_i - t_{i-1})$

och får då att längden av den approximerande kurvan blir
$$\sqrt{1 + f'(t_1^*)^2}(t_1 - t_0) + \cdots + \sqrt{1 + f'(t_n^*)^2}(t_n - t_{n-1})$$

Längden

$$\sqrt{1+\ f'(t_1^*)^2}(t_1-t_0)+\cdots+\sqrt{1+\ f'(t_n^*)^2}(t_n-t_{n-1})$$

av den approximerande kurvan är en Riemannsumma för

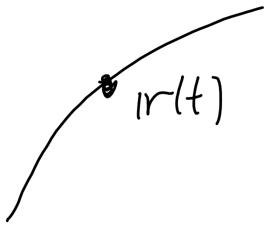
$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b |\mathbf{r}'(x)|\,\mathrm{d}x$$

så när $n \to \infty$ så går längden av den approximerande kurvan mot integralen ovan vilket motiverar formeln för längden (när kurvan är en graf).

För allmänna kurvor finns en skiss till argument på s. 652-653

Rörelse av partiklar i rummet 13.4

Man kan använda en vektorvärd funktion $\mathbf{r}(t)$ för att beskriva rörelsen av en partikel som vid tiden t har positionsvektor $\mathbf{r}(t)$.



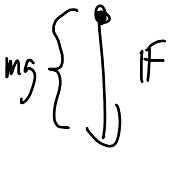
__Def__ __Hastighetsvektorn__ $\mathbf{v}(t)$ för en sådan partikel är $\mathbf{r}'(t)$ och __farten__ är längden $|\mathbf{r}'(t)|$ av hastighetsvektorn. __Accelerationen__ är $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.

Detta används för att beskriva olika fysiska fenomen, t.ex.:

__Newton's andra lag:__ Om kraften $\mathbf{F}(t)$ verkar på en partikel med massa m, så är

$$\mathbf{F}(t) = m\,\mathbf{a}(t).$$

__Ex__ Visa att om bara tyngdkraften verkar på en partikel med massa m, s.a. $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle$ och partikeln vid $t=0$ har position $\mathbf{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$ och hastighet $\mathbf{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$.



så har partikeln vid tid t position

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle a + dt,\ b + et,\ c + ft - \frac{gt^2}{2} \right\rangle.$$

Kontrollerar att uppfyller villkoren och Newton's andra lag:

$\mathbb{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$.

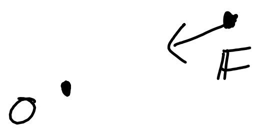
$\mathbb{v}'(t) = \langle d, e, f - gt \rangle$

$\mathbb{v}'(0) = \langle d, e, f \rangle$

$\mathbb{a}(t) = \langle 0, 0, -g \rangle$

$m\mathbb{a}(t) = \langle 0, 0, -mg \rangle = \mathbb{F}$.

<u>Newton's gravitationslag</u> Om har två kroppar med massa M resp. m, och den första har position i origo och den andra position $\mathbb{r}$, så dras den andra kroppen mot den första med kraften



$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbb{r}, \text{ där } r = |\mathbb{r}|$$

(G universell konstant)

($|\mathbb{F}|$ proportionell mot M, m och $\frac{|\mathbb{r}|}{r^3} = \frac{1}{r^2}$)

Dessa lagar kan bl.a. användas för att härleda Keplers lagar om hur en planet rör sig kring en sol, vilka bl.a. säger att den rör sig i en elliptisk bana, se s. 876-877.

Obs: Detta gäller för ett solsystem med en planet. För fler planeter är det väsentligen omöjligt att explicit beskriva planetrörelserna. Detta är ett av de ursprungliga exemplen på ett kaotiskt system (små ändringar i position eller hastighet gör att ej kan förutse rörelsen på lång sikt.)

Frågor i classtime.com:

Gränsvärden

Antag att gränsvärdet av $f(x, y)$ när (x, y) går mot $(0, 0)$ längs x-axeln, y-axeln och längs linjen $x = y$ alla är 3. Vad är sant? (mer än ett svar kan vara korrekt)

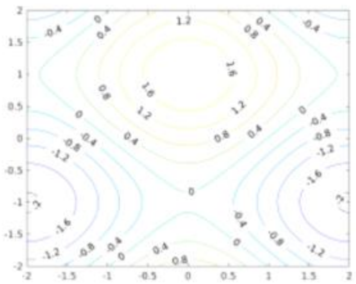
- ✅ Om gränsvärdet av $f(x, y)$ när (x, y) går mot $(0, 0)$ existerar så är det 3. — 47%
- ✅ Man kan utifrån detta inte avgöra om gränsvärdet av $f(x, y)$ när (x, y) går mot $(0, 0)$ existerar. — 34%
- ❌ Gränsvärdet av $f(x, y)$ när (x, y) går mot $(0, 0)$ är 3. — 19%

(procenten är som andel av alla svar, och skulle alltså vara 50% på varje rätt svar om alla svarat rätt, inte 100%)

Bara för att gränsvärdet finns längs några linjer innebär det *inte* att gränsvärdet existerar. Måste i så fall finnas oavsett hur närmar sig $(0,0)$!

Höjdkarta

Följande är en höjdkarta för en funktion definierad på $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$. Vilka punkter är globala minimum för funktionen på D? (mer än ett svar kan vara korrekt)



- ✅ $(-2, -1)$ — 47%
- ✅ $(2, -1)$ — 40%
- ❌ $(1, 0)$ — 7%
- ❌ $(-2, 2)$ — 5%
- ❌ $(0, -2)$ — 2%

Andraderivatatestet:

$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$

$D > 0$: $f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$lok. min, $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ lok. max

$D < 0$: sadelpunkt

Andraderivatatestet 1

Vilket av följande räcker för att avgöra om en funktion $f(x,y)$ har ett lokalt minimum i en kritisk punkt (a,b)?

✗ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{yy}(a,b) > 0$	59%
✓ inget av ovanstående	35%
✗ $f_{xx}(a,b) < 0, f_{yy}(a,b) > 0$	6%

Om $f_{xx}(a,b) > 0,\ f_{yy}(a,b) > 0$ kan hända att lok. min. $(x^2 + y^2)$ eller sadelpunkt $(x^2 + y^2 + 10xy)$.

Andraderivatatestet 2

Vilket av följande räcker för att avgöra om en funktion $f(x,y)$ har en sadelpunkt i en kritisk punkt (a,b) ?

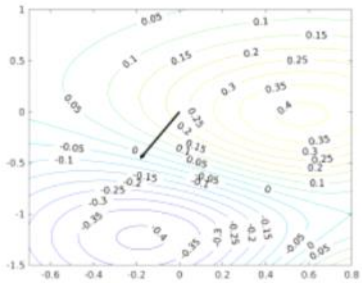
✗ inget av ovanstående	68%
✓ $f_{xx}(a,b) < 0, f_{yy}(a,b) > 0$	23%
✗ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{yy}(a,b) > 0$	10%

Om $f_{xx}(a,b) < 0$, $f_{yy}(a,b) > 0$, så blir $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$ och $f_{xy}(a,b)^2 \geq 0$, så

$D < 0$, och därför blir (a,b) en sadelpunkt.

Riktningsderivata

Bilden är en höjdkarta för en funktion $f(x,y)$, med en riktningsvektor $\mathbf{u}$ utritad i $(0,0)$. Vad är $D_{\mathbf{u}}f(x,y)$?



✓ Negativt	86%
✗ Går inte att avgöra	7%
✗ Noll	4%
✗ Positivt	4%

$f(x,y)$ avtar när går i vektorn $\mathbf{u}$'s riktning, så $D_{\mathbf{u}}f(0,0) < 0$