Sammanfattning Föreläsning 8

Metod för att bestämma max och min till $f(x,y)$,
där $f(x,y)$ deriverbar på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D sluten och begränsad:

Max och min till f får man genom att jämföra funktionsvärdena i

1) Kritiska punkter till f i D
2) Randpunkter till D

   Detta kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:

   2.1) Kritiska punkter när ser f som funktion av en variabel längs randkurvor

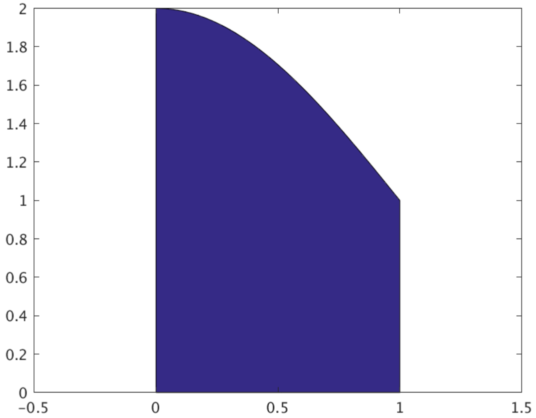
   2.2) Hörn, dvs. ändpunkter till randkurvorna

- Optimering med bivillkor - Metoden med Lagrangemultiplikatorer:
  För att hitta extremvärden till $f(x,y)$ under bivillkoret att $g(x,y) = k$ *(om extremvärden finns och* $\nabla g(x,y) \neq 0$ *på* $g(x,y) = k$*):*

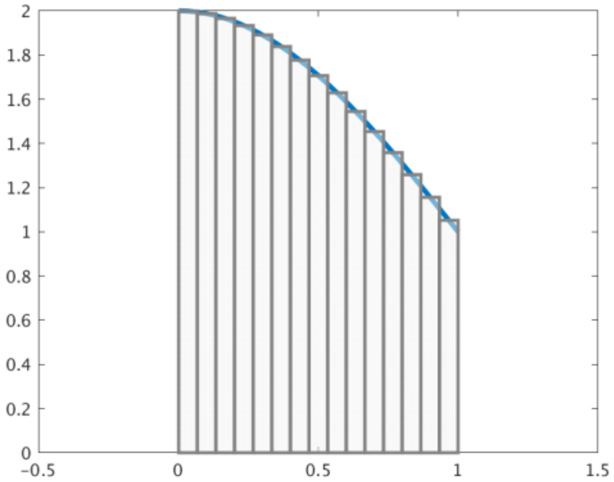
1) Hitta alla lösningar (x,y) till $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$ för någon konstant λ.
2) Beräkna $f(x,y)$ för alla lösningar från 1). Det största värdet ger maximum och det minsta minimum.

Integraler i en variabel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{"Arean under grafen } f(x)\text{"}$$

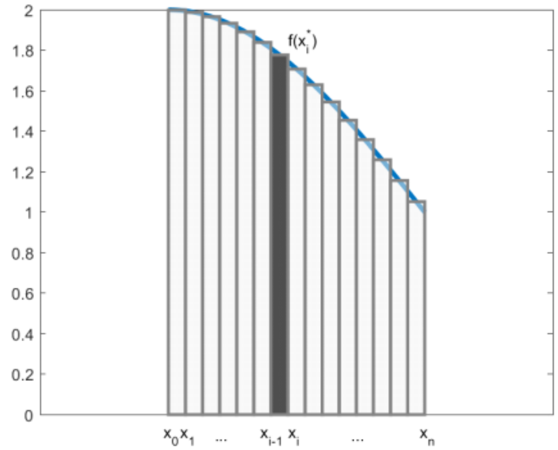


Integraler definierade genom att approximera grafen med rektanglar, beräkna arean av rektanglarna och gå i gräns med finare och finare indelning



Gör indelning
$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$
väljer punkter $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$
och skapar rektanglar mellan

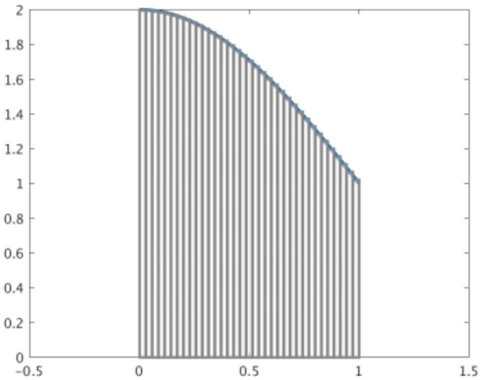
x_{i-1} och x_i i x-led och mellan
0 och $f\left(x_i^*\right)$ i y-led.



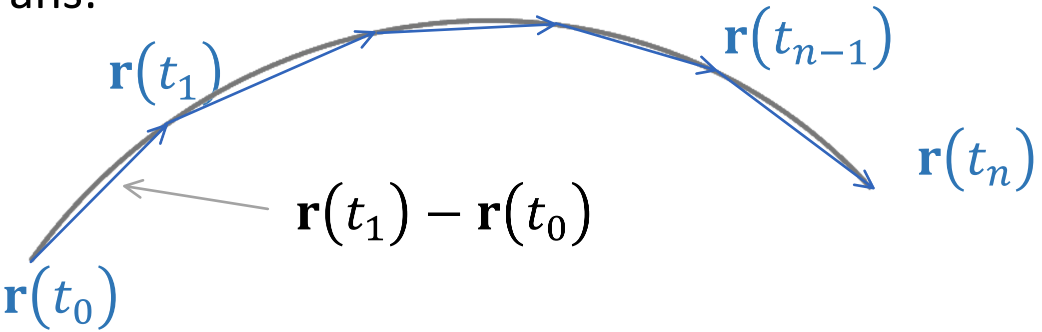
Arean av rektangel nr *i*:
$f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$
Area av alla rektanglar (kallas en Riemannsumma för f)
$f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f(x_1^*)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$$

där gränsvärdet är att man tar finare och finare indelningar (dvs längden av delintervallen går mot 0)



För att beräkna längd av kurva $\mathbf{r}(t)$ mellan $t = a$ och $t = b$, approximerar kurvan med räta linjer, beräknar längden och går i gräns:



Total längd: $|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$

Härleder formel för gränsvärdet av längden

$$\left|\mathbf{r}(t_1)-\mathbf{r}(t_0)\right|+\cdots+\left|\mathbf{r}(t_n)-\mathbf{r}(t_{n-1})\right|$$

när $n\to\infty$ i specialfallet $\mathbf{r}(t)=\langle t,f(t)\rangle$:

Enligt medelvärdessatsen: $f(t_i)-f(t_{i-1})=f'(t_i^*)(t_i-t_{i-1})$
för något $t_{i-1}\le t_i^*\le t_i$

$$\left|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\right|=\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2}$$

$$=\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(f'(t_i^*)(t_i-t_{i-1}))^2}=\sqrt{1+f'(t_i^*)^2}(t_i-t_{i-1})$$

Vi ersätter varje term i totala längden

$$\left|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)\right| + \cdots + \left|\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})\right|$$

med $\left|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\right| = \sqrt{1 + f'(t_i^*)^2}(t_i - t_{i-1})$

och får då att längden av den approximerande kurvan blir

$$\sqrt{1 + f'(t_1^*)^2}(t_1 - t_0) + \cdots + \sqrt{1 + f'(t_n^*)^2}(t_n - t_{n-1})$$

Längden $\sqrt{1+\ f'(t_1^*)^2}(t_1 - t_0) + \cdots + \sqrt{1+\ f'(t_n^*)^2}(t_n - t_{n-1})$
av den approximerande kurvan är en Riemannsumma för

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b |\mathbf{r}'(x)|\,\mathrm{d}x$$

så när $n \to \infty$ så går längden av den approximerande kurvan mot integralen ovan vilket motiverar formeln för längden (när kurvan är en graf).

För allmänna kurvor finns en skiss till argument på s. 652-653

Frågor i classtime.com:

Gränsvärden

Antag att gränsvärdet av $f(x,y)$ när (x,y) går mot $(0,0)$ längs x-axeln, y-axeln och längs linjen $x=y$ alla är 3. Vad är sant? (mer än ett svar kan vara korrekt)

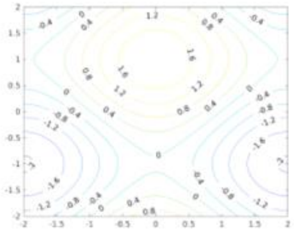
✅	Om gränsvärdet av $f(x,y)$ när (x,y) går mot $(0,0)$ existerar så är det 3.	47%
✅	Man kan utifrån detta inte avgöra om gränsvärdet av $f(x,y)$ när (x,y) går mot $(0,0)$ existerar.	34%
❌	Gränsvärdet av $f(x,y)$ när (x,y) går mot $(0,0)$ är 3.	19%

(procenten är som andel av alla svar, och skulle alltså vara 50% på varje rätt svar om alla svarat rätt, inte 100%)

Bara för att gränsvärdet finns längs några linjer innebär det *inte* att gränsvärdet existerar. Måste i så fall finnas oavsett hur närmar sig (0,0)!

Höjdkarta

Följande är en höjdkarta för en funktion definierad på $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$.
Vilka punkter är globala minimum för funktionen på D? (mer än ett svar kan vara korrekt)



- ✅ $(-2, -1)$ — 47%
- ✅ $(2, -1)$ — 40%
- ❌ $(1, 0)$ — 7%
- ❌ $(-2, 2)$ — 5%
- ❌ $(0, -2)$ — 2%

Andraderivatatestet:

$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$

$D > 0$: $f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$lok. min, $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ lok. max

$D < 0$: sadelpunkt

Andraderivatatestet 1

Vilket av följande räcker för att avgöra om en funktion $f(x, y)$ har ett lokalt minimum i en kritisk punkt (a, b)?

✗ $f_{xx}(a, b) > 0, f_{yy}(a, b) > 0$	59%
✓ inget av ovanstående	35%
✗ $f_{xx}(a, b) < 0, f_{yy}(a, b) > 0$	6%

Om $f_{xx}(a, b) > 0,\ f_{yy}(a, b) > 0$ kan hända att lok. min. $(x^2 + y^2)$ eller sadelpunkt $(x^2 + y^2 + 10xy)$.

Andraderivatatestet 2

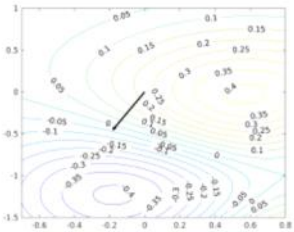
Vilket av följande räcker för att avgöra om en funktion $f(x, y)$ har en sadelpunkt i en kritisk punkt (a, b) ?

✗	inget av ovanstående	68%
✓	$f_{xx}(a, b) < 0, f_{yy}(a, b) > 0$	23%
✗	$f_{xx}(a, b) > 0, f_{yy}(a, b) > 0$	10%

Om $f_{xx}(a, b) < 0$, $f_{yy}(a, b) > 0$, så blir $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) < 0$ och $f_{xy}(a, b)^2 \geq 0$, så $D < 0$, och därför blir (a, b) en sadelpunkt.

Riktningsderivata

Bilden är en höjdkarta för en funktion $f(x, y)$, med en riktningsvektor $\mathbf{u}$ utritad i $(0, 0)$. Vad är $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$?



- ✓ Negativt — 86%
- ✗ Går inte att avgöra — 7%
- ✗ Noll — 4%
- ✗ Positivt — 4%

$f(x, y)$ avtar när går i vektorn $\mathbf{u}$'s riktning, så $D_{\mathbf{u}} f(0{,}0) < 0$