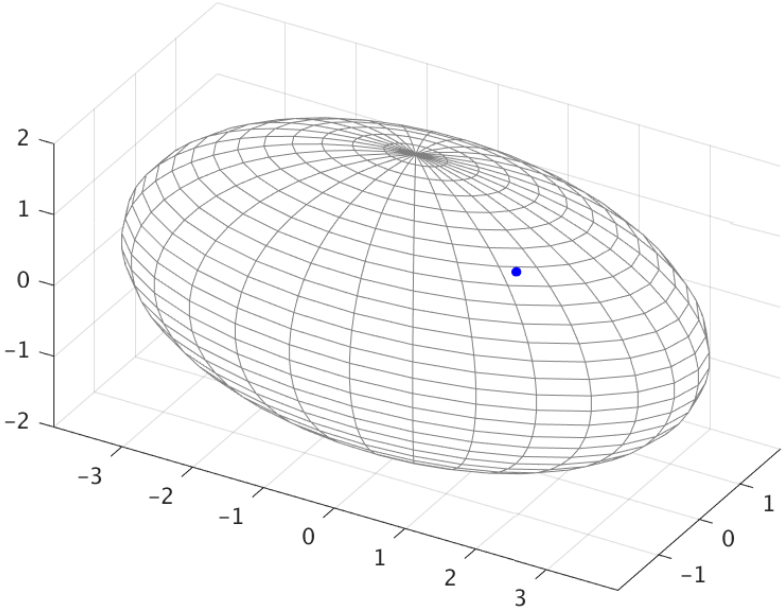
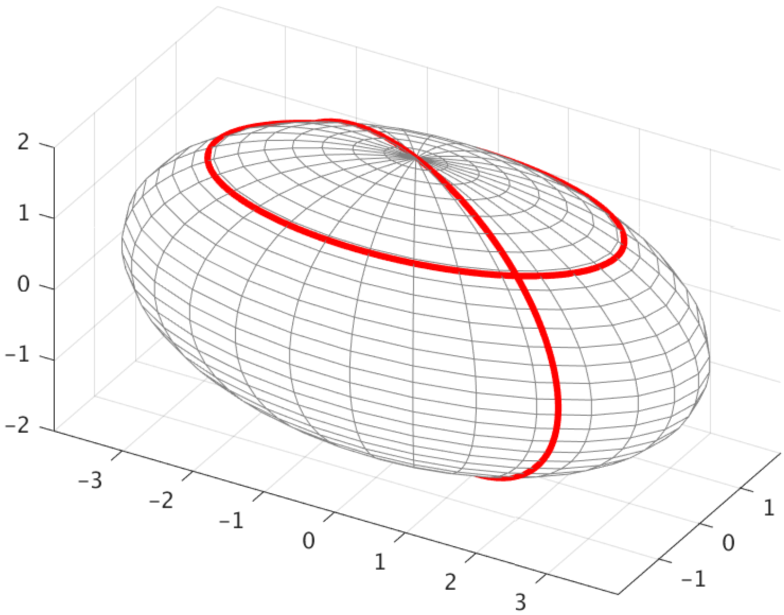
Tangentplan för parametriserad yta

Yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$.
Fixerar $\langle a, b, c \rangle = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ (blå)

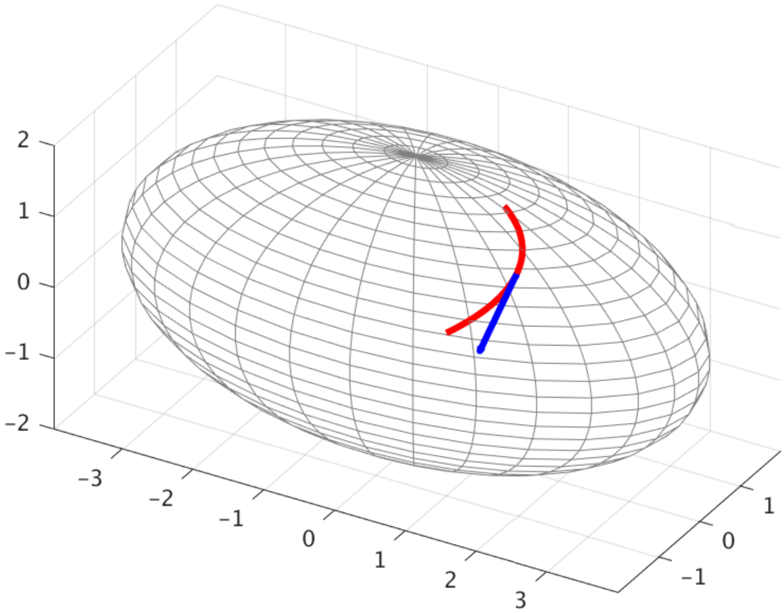


Får naturliga kurvor $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}(u, v_0)$ och $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}(u_0, v)$ i ytan när fixerar $v = v_0$ eller $u = u_0$.



Tangentplanet till S i (a, b, c) definieras så att det går genom punkten (a, b, c) och innehåller alla tangentvektorer $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ (blå vektor) där

- $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ligger i S (röd kurva)
  (vilket innebär att den är på formen $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$)
- $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = (a, b, c)$, dvs $u(t_0) = u_0$ och $v(t_0) = v_0$.

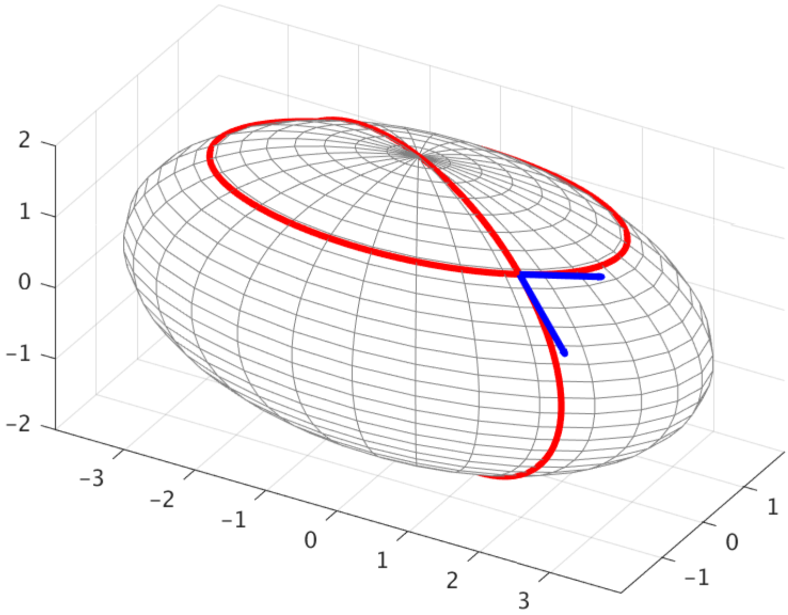


Enligt kedjeregeln, om $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ så blir

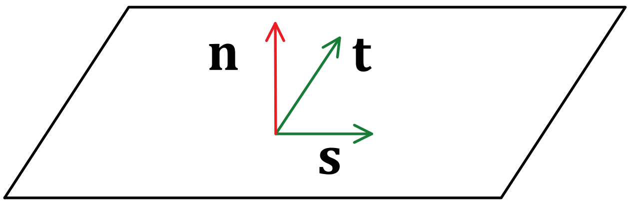
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}'(t_0) &= \mathbf{r}_u\left(u(t_0), v(t_0)\right)u'(t_0) + \mathbf{r}_v\left(u(t_0), v(t_0)\right)v'(t_0)\\ &= \mathbf{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0).\end{aligned}$$

Om tangentplanet skall innehålla alla tangentvektorer $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ som ovan så räcker det alltså att tangentplanet innehåller vektorerna

$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \mathbf{r}_1'(u_0)$ och $\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \mathbf{r}_2'(v_0)$



Om planet T innehåller två icke-parallella vektorer $\mathbf{s}$ och $\mathbf{t}$ så har det normalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$



Om ett plan går genom en punkt (a, b, c) och har normalvektor $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ så ges planet av

$$n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c)$$

Detta blir då formeln för tangentplanet i

$(a, b, c) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ med

$$\mathbf{n} = \langle \mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3 \rangle = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$$