MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**
Chalmers tekniska högskola Datum: 161024 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2016/17

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1617
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. (a) Bestäm lineariseringen till (5p)

$$f(x,y) = \arctan(x + 3\ln(y))$$

kring $(x,y) = (0,1)$.

(b) Använd lineariseringen för att approximera $\arctan(0.01 + 3\ln(1.02))$. (1p)

2. (a) Förklara varför gränsvärdet (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$$

inte existerar.

(b) Bevisa att (4p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan (6p)

$$5ze^z + 3x^2y = 3$$

i punkten $(1,1,0)$.

4. Bestäm globala maximum och minimum till funktionen (7p)

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4}$$

på halvcirkelområdet $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

Var god vänd!

5. Beräkna längden av kurvan (6p)

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}t, \frac{t^2}{2}, \ln(t)\right),$$

där $1 \leq t \leq e$.

6. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D x^2 + y^2 \, dA,$$

där $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

7. Beräkna masscentrum för en tunn tråd längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi/2$, där tråden har konstant densitet $\rho(x, y) = 1$. (6p)

8. Avgör vilka av vektorfälten (6p)

$$\mathbf{F} = (3x^2y - 2x, x^3 + y) \text{ och } \mathbf{G} = (3x^2y - 2y, x^3 + x)$$

som är konservativa. För de av vektorfälten som är konservativa, bestäm en potential.

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 16/17

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)dudv.$

Masscentrum av kurva C, $(x(t), y(t), z(t))$, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där}\ \bar{x} = \frac{1}{m_C}\int_C x\rho(x, y, z)\, ds\ \text{osv., där}\ m_C = \int_C \rho(x, y, z)\, ds$$

Masscentrum av parametriserad yta S, $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där}\ \bar{x} = \frac{1}{m_S}\iint_S x\rho(x, y, z)\, dS\ \text{osv., där}\ m_S = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

Masscentrum av kropp D, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där}\ \bar{x} = \frac{1}{m_D}\iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV\ \text{osv., där}\ m_D = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV$$

Greens formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$$\cos(0) = 1,\quad \cos(\pi/6) = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos(\pi/4) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos(\pi/3) = \tfrac{1}{2},\quad \cos(\pi/2) = 0,$$
$$\sin(0) = 0,\quad \sin(\pi/6) = \tfrac{1}{2},\quad \sin(\pi/4) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin(\pi/3) = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin(\pi/2) = 1.$$

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2w_3 - w_2v_3, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

Integraler

$$\begin{aligned} \int x^a \, dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 & \int \tfrac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x \, dx &= -\cos x + C & \int \cos x \, dx &= \sin x + C \\ \int \tfrac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + C & \int \tfrac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x + C \\ \int e^x \, dx &= e^x + C & \int \tfrac{1}{x^2+a^2} \, dx &= \tfrac{1}{a} \arctan \tfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \\ \int \tfrac{1}{\sqrt{a-x^2}} \, dx &= \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 & \int \sqrt{a - x^2} \, dx &= \tfrac{1}{2} x\sqrt{a - x^2} + \tfrac{a}{2} \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \\ \int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx &= \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 & \int \sqrt{x^2 + a} \, dx &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C \end{aligned}$$

Derivator

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx} x^a &= ax^{a-1}, \quad a \neq 0 & \tfrac{d}{dx} e^x &= e^x \\ \tfrac{d}{dx} \sin x &= \cos x & \tfrac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\ \tfrac{d}{dx} \ln x &= \tfrac{1}{x} & \tfrac{d}{dx} \arctan x &= \tfrac{1}{1+x^2} \\ \tfrac{d}{dx} \arcsin x &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \tfrac{d}{dx} \arccos x &= -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \tfrac{d}{dx} (f(x) + g(x)) &= f'(x) + g'(x) & \tfrac{d}{dx} (f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \tfrac{d}{dx} (f(g(x))) &= f'(g(x))g'(x) & \tfrac{d}{dx} \tfrac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$