MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**
Chalmers tekniska högskola Datum: 161220 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2016/17

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1617
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. Beräkna längden av kurvan (6p)

$$\mathbf{r}(t) = \left(5, t^2, 2t^3\right),$$

där $0 \leq t \leq 1$.

2. Låt

$$f(x, y) = \sin(x^2 y) + 1.$$

(a) Bestäm i vilken riktning som f växer mest i punkten $(\sqrt{\pi}, 2)$. (2p)

(b) Ge en formel för tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(\sqrt{\pi}, 2, 1)$. (2p)

(c) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(\sqrt{\pi}, 2)$ och riktningen $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. (2p)

3. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen (7p)

$$f(x, y) = y^3 + x^2 y - 3x^2 - 6y^2,$$

och avgör om dessa punkter är lokala maximum, minimum eller sadelpunkter.

4. Beräkna trippelintegralen (6p)

$$\iiint_D \cos(x + z)\, dV,$$

över området

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq \pi/2,\ 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq z \leq x\}.$$

Var god vänd!

5. Beräkna masscentrum för kvartscirkelskivan (7p)

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$

om D har varierande densitet

$$\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2.$$

6. Beräkna kurvintegralen (6p)

$$\int_C 2xy\, dx + (x^2 + 1)\, dy,$$

där kurvan C parametriseras av $(x(t), y(t)) = (t^3 + 1, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

7. Låt S vara den parametriserade ytan som ges av

$$\mathbf{r}(s, t) = (s^2, st, t^2).$$

Bestäm en formel för tangentplanet till S i punkten $\mathbf{r}(3, 1) = (9, 3, 1)$. (6p)

8. Beräkna arean av den delen av ytan (6p)

$$z = 2x + 2y$$

där (x, y) ligger i triangeln som begränsas av linjerna $x = 1$, $y = 0$ och $x = y$.

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 16/17

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)dudv.$

Masscentrum av kurva C, $(x(t), y(t), z(t))$, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där } \bar{x} = \frac{1}{m_C} \int_C x\rho(x, y, z)\, ds \text{ osv., där } m_C = \int_C \rho(x, y, z)\, ds$$

Masscentrum av parametriserad yta S, $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där } \bar{x} = \frac{1}{m_S} \iint_S x\rho(x, y, z)\, dS \text{ osv., där } m_S = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

Masscentrum av kropp D, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där } \bar{x} = \frac{1}{m_D} \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV \text{ osv., där } m_D = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV$$

Greens formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi/6) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(\pi/4) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\pi/3) = \tfrac{1}{2}, \quad \cos(\pi/2) = 0,$$
$$\sin(0) = 0, \quad \sin(\pi/6) = \tfrac{1}{2}, \quad \sin(\pi/4) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(\pi/3) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(\pi/2) = 1.$$

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2 w_3 - w_2 v_3, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

Integraler

$$\int x^a \, dx = \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \tfrac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \qquad \int \tfrac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \qquad \int \tfrac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \tfrac{1}{a} \arctan \tfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{a - x^2}} \, dx = \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a - x^2} \, dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \tfrac{a}{2} \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{x^2 + a} \, dx = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$$

Derivator

$$\tfrac{d}{dx} x^a = a x^{a-1}, \quad a \neq 0 \qquad \tfrac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\tfrac{d}{dx} \sin x = \cos x \qquad \tfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\tfrac{d}{dx} \ln x = \tfrac{1}{x} \qquad \tfrac{d}{dx} \arctan x = \tfrac{1}{1 + x^2}$$

$$\tfrac{d}{dx} \arcsin x = \tfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \tfrac{d}{dx} \arccos x = -\tfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\tfrac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x) \qquad \tfrac{d}{dx} (f(x) g(x)) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$\tfrac{d}{dx} (f(g(x))) = f'(g(x)) g'(x) \qquad \tfrac{d}{dx} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \tfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$