MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**

Chalmers tekniska högskola Datum: 170817 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng

031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2016/17

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1617

Examinator: Richard Lärkäng

---

1. Antag att en partikel rör sig med positionsvektor (5p)

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(2t) + \cos(2t), \sin(2t) - \cos(2t), t^2).$$

Vad är hastigheten, farten och accelerationen av partikeln?

2. Låt (5p)

$$g(x, y) = f(e^{x+2y}, e^{x-2y}),$$

där $f(u, v)$ är en deriverbar funktion så att

$$f(0, 0) = 2, f_u(0, 0) = 3, f_v(0, 0) = 7$$

och

$$f(1, 1) = 3, f_u(1, 1) = 11, f_v(1, 1) = 5.$$

Beräkna $g'_x(0, 0)$ och $g'_y(0, 0)$.

3. Låt $f(x, y) = y + x - 5$. Bestäm maximum och minimum av funktionen $f(x, y)$ under bivillkoret (6p)

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

4. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D e^{y^3}\, dA,$$

där D är området som begränsas av kurvorna $x = 0$, $y = 2$ och $x = y^2$.

Var god vänd!

5. Beräkna arean av den delen av hyperboloiden $z = 2(x^2 - y^2)$ som ligger ovanför halv-cirkelskivan $\{x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. (6p)

6. Beräkna arbetet som vektorfältet $\mathbf{F} = (e^{-y}, -xe^{-y} + e^y)$ utför på en partikel som rör sig längs med kurvan (6p)

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(\pi t), 3t + \sin(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

7. Beräkna trippelintegralen (8p)

$$\iiint_D x^2 + y^2 dV,$$

där D är området innehållet i $\{z \geq 0\}$ som ligger mellan sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

8. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z(x^2 + y^2))$ ut ur området som begränsas av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planen $z = 0$ och $z = 2$. (8p)

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 16/17

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)dudv.$

Masscentrum av kurva C, $(x(t), y(t), z(t))$, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där } \bar{x} = \frac{1}{m_C}\int_C x\rho(x, y, z)\,ds \text{ osv., där } m_C = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$$

Masscentrum av parametriserad yta S, $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där } \bar{x} = \frac{1}{m_S}\iint_S x\rho(x, y, z)\,dS \text{ osv., där } m_S = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS$$

Masscentrum av kropp D, densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \text{där } \bar{x} = \frac{1}{m_D}\iiint_D x\rho(x, y, z)\,dV \text{ osv., där } m_D = \iiint_D \rho(x, y, z)\,dV$$

Greens formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$$\cos(0) = 1,\quad \cos(\pi/6) = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos(\pi/4) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos(\pi/3) = \tfrac{1}{2},\quad \cos(\pi/2) = 0,$$
$$\sin(0) = 0,\quad \sin(\pi/6) = \tfrac{1}{2},\quad \sin(\pi/4) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin(\pi/3) = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin(\pi/2) = 1.$$

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2w_3 - w_2v_3, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

Integraler

$$\begin{aligned} \int x^a \, dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 & \int \tfrac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x \, dx &= -\cos x + C & \int \cos x \, dx &= \sin x + C \\ \int \tfrac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + C & \int \tfrac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x + C \\ \int e^x \, dx &= e^x + C & \int \tfrac{1}{x^2+a^2} \, dx &= \tfrac{1}{a} \arctan \tfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \\ \int \tfrac{1}{\sqrt{a-x^2}} \, dx &= \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 & \int \sqrt{a - x^2} \, dx &= \tfrac{1}{2} x\sqrt{a - x^2} + \tfrac{a}{2} \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \\ \int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx &= \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 & \int \sqrt{x^2 + a} \, dx &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C \end{aligned}$$

Derivator

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx} x^a &= ax^{a-1}, \quad a \neq 0 & \tfrac{d}{dx} e^x &= e^x \\ \tfrac{d}{dx} \sin x &= \cos x & \tfrac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\ \tfrac{d}{dx} \ln x &= \tfrac{1}{x} & \tfrac{d}{dx} \arctan x &= \tfrac{1}{1+x^2} \\ \tfrac{d}{dx} \arcsin x &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \tfrac{d}{dx} \arccos x &= -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \tfrac{d}{dx} (f(x) + g(x)) &= f'(x) + g'(x) & \tfrac{d}{dx} (f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \tfrac{d}{dx} (f(g(x))) &= f'(g(x))g'(x) & \tfrac{d}{dx} \tfrac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$