MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**
Chalmers tekniska högskola Datum: 171023 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2017/18

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2017 inkluderas.)
Obs: I rättningen bedöms hela lösningen och inte bara svaret, så skriv fullständig lösningar med motiveringar. Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1718
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. Bestäm tangentplanet till $z = e^{x^2-y^2}$ i punkten $(3, 2, e^5)$. (5p)

2. Låt

$$g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Beräkna gränsvärdet (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

eller förklara varför det inte existerar.

(b) Låt (3p)

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beskriv i vilka punkter som $f(x,y)$ är kontinuerlig.

3. Avgör vilka av följande funktioner $f(x,t)$ som löser vågekvationen $f_{tt}(x,y) = c^2 f_{xx}(x,y)$.

(a) $\cos((x+ct)^2)$ (3p)

(b) $e^{x^2-c^2t^2}$ (3p)

4. Låt $f(x,y) = xy$. Bestäm maximum och minimum av $f(x,y)$ när (x,y) ligger i den slutna triangeln med hörn i $(2,2)$, $(2,6)$ och $(4,2)$. (6p)

Var god vänd!

5. Beräkna kurvintegralen (6p)

$$\int_C 4e^{2z} ds,$$

där C är kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t), \quad 0 \le t \le \ln 2.$$

6. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D 3y dA,$$

där D är det begränsade området som ligger mellan kurvorna $x = y^2 - 2y + 1$, $x = 1 + 2y$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet (7p)

$$\mathbf{F} = \langle xe^{xy} - e^y, e^x - ye^{xy}, 2\rangle.$$

upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$. Det kan underlätta att veta att

$$\mathbf{F} = \mathrm{rot}\langle ze^x - y, ze^y + x, e^{xy}\rangle.$$

8. Beräkna masscentrum av E som är den delen av klotet $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ som ligger i första oktanten (dvs., där $x \ge 0, y \ge 0$ och $z \ge 0$). E antas ha konstant densitet $\rho(x, y, z) = 1$. (8p)

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 17/18

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)dudv.$

Om $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ *så är* $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \langle -f_u, -f_v, 1\rangle.$

Masscentrum för kurva C med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \int_C x\rho(x, y, z)ds \text{ osv., och } m = \int_C \rho(x, y, z)ds$$

Masscentrum för parametriserad yta S med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iint_S x\rho(x, y, z)dS \text{ osv., och } m = \iint_S \rho(x, y, z)dS$$

Masscentrum för kropp D med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV \text{ osv., och } m = \iiint_D \rho(x, y, z)dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \langle v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1 \rangle.$$

Derivator

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx} x^a &= a x^{a-1}, \quad a \neq 0 & \tfrac{d}{dx} e^x &= e^x \\
\tfrac{d}{dx} \sin x &= \cos x & \tfrac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\
\tfrac{d}{dx} \ln x &= \tfrac{1}{x} & \tfrac{d}{dx} \arctan x &= \tfrac{1}{1+x^2} \\
\tfrac{d}{dx} \arcsin x &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \tfrac{d}{dx} \arccos x &= -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\tfrac{d}{dx} \left(f(x) + g(x)\right) &= f'(x) + g'(x) & \tfrac{d}{dx} \left(f(x)g(x)\right) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\tfrac{d}{dx} (f(g(x))) &= f'(g(x))g'(x) & \tfrac{d}{dx} \tfrac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

Integraler

$$\begin{aligned}
\textstyle\int x^a \, dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 & \textstyle\int \tfrac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + C \\
\textstyle\int \sin x \, dx &= -\cos x + C & \textstyle\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\textstyle\int \tfrac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + C & \textstyle\int \tfrac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x + C \\
\textstyle\int e^x \, dx &= e^x + C & \textstyle\int \tfrac{1}{x^2 + a^2} \, dx &= \tfrac{1}{a} \arctan \tfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{a - x^2}} \, dx &= \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 & \textstyle\int \sqrt{a - x^2} \, dx &= \tfrac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \tfrac{a}{2} \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx &= \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 & \textstyle\int \sqrt{x^2 + a} \, dx &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C
\end{aligned}$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \text{ där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$