MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**
Chalmers tekniska högskola Datum: 171219 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2017/18

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2017 inkluderas.)
Obs: I rättningen bedöms hela lösningen och inte bara svaret, så skriv fullständig lösningar med motiveringar. Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1718
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. Bestäm tangentplanet till nivåytan $x\cos(x) + \cos(zy) = 0$ i punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, \pi)$. (5p)

2. Låt
$$g(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Beräkna gränsvärdet (3p)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$
eller förklara varför det inte existerar.

(b) Låt (3p)
$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Beskriv i vilka punkter som $f(x,y)$ är kontinuerlig.

3. Låt (6p)
$$f(x,y) = 2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y.$$
Bestäm globala maximum och minimum av f i området $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

4. Beräkna (6p)
$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA,$$
där $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

Var god vänd!

5. Beräkna volymen av området (6p)

$$E = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 2, 0 \leq x \leq \ln z, 0 \leq y \leq e^x\}.$$

6. Avgör vilka av vektorfälten (6p)

$$\mathbf{F} = \langle 3x^2 + z, 2y, x + 3z^2 \rangle \text{ och } \mathbf{G} = \langle 3x^2 + z, 2x, x + 3z^2 \rangle$$

som är konservativa. För de av vektorfälten som är konservativa, bestäm en potential.

7. Beräkna arean av ytan (7p)

$$z = \frac{2}{3}\big(x^{3/2} + y^{3/2}\big), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

8. Beräkna flödet av vektorfältet (8p)

$$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle.$$

upp genom ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, där $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 17/18

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)dudv.$

Om $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ *så är* $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \langle -f_u, -f_v, 1\rangle$.

Masscentrum för kurva C med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \int_C x\rho(x, y, z)ds \text{ osv., och } m = \int_C \rho(x, y, z)ds$$

Masscentrum för parametriserad yta S med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iint_S x\rho(x, y, z)dS \text{ osv., och } m = \iint_S \rho(x, y, z)dS$$

Masscentrum för kropp D med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV \text{ osv., och } m = \iiint_D \rho(x, y, z)dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \langle v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1 \rangle.$$

Derivator

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx} x^a &= a x^{a-1}, \quad a \neq 0 & \tfrac{d}{dx} e^x &= e^x \\ \tfrac{d}{dx} \sin x &= \cos x & \tfrac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\ \tfrac{d}{dx} \ln x &= \tfrac{1}{x} & \tfrac{d}{dx} \arctan x &= \tfrac{1}{1+x^2} \\ \tfrac{d}{dx} \arcsin x &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \tfrac{d}{dx} \arccos x &= -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \tfrac{d}{dx} \left(f(x) + g(x) \right) &= f'(x) + g'(x) & \tfrac{d}{dx} \left(f(x) g(x) \right) &= f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \\ \tfrac{d}{dx} (f(g(x))) &= f'(g(x)) g'(x) & \tfrac{d}{dx} \tfrac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Integraler

$$\begin{aligned} \textstyle\int x^a \, dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 & \textstyle\int \tfrac{1}{x} \, dx &= \ln |x| + C \\ \textstyle\int \sin x \, dx &= -\cos x + C & \textstyle\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\ \textstyle\int \tfrac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + C & \textstyle\int \tfrac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x + C \\ \textstyle\int e^x \, dx &= e^x + C & \textstyle\int \tfrac{1}{x^2 + a^2} \, dx &= \tfrac{1}{a} \arctan \tfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \\ \textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{a - x^2}} \, dx &= \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 & \textstyle\int \sqrt{a - x^2} \, dx &= \tfrac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \tfrac{a}{2} \arcsin \tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \\ \textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx &= \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 & \textstyle\int \sqrt{x^2 + a} \, dx &= \tfrac{1}{2} (x \sqrt{x^2 + a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|) + C \end{aligned}$$

$$\int F(x) g(x) dx = F(x) G(x) - \int f(x) G(x) dx \text{ där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$