MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**
Chalmers tekniska högskola Datum: 180823 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2017/18

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2017 inkluderas.)
Obs: I rättningen bedöms hela lösningen och inte bara svaret, så skriv fullständig lösningar med motiveringar.
Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1718
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. Låt C vara kurvan som är skärningen mellan ytan $y = z^2 \ln(1+x)$ och planet $x+z=2$.

(a) Bestäm en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av kurvan C. (3p)

(b) Beskriv en formel för tangentlinjen till C i punkten $(1, \ln 2, 1)$. (3p)

2. Låt $f(x,y,z) = \sqrt{1+3e^{x^2+y^2-z^2}}$.

(a) Bestäm i vilken riktning som f växer mest i punkten $(3,4,5)$. (2p)

(b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(3,4,5)$ och riktningen $\mathbf{v} = \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$. (2p)

3. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen (6p)

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) e^{2x},$$

och avgör om dessa punkter är lokala maximum, minimum eller sadelpunkter.

4. Beräkna längden av kurvan (6p)

$$\mathbf{r}(t) = \left(1 + \ln t, t^2 - 1, 1 + 2t\right),$$

där $1/2 \le t \le 3$.

Var god vänd!

5. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D y\cos(xy)\,dA,$$

där $D = \{(x,y) \mid 2 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

6. Beräkna trippelintegralen (7p)

$$\iiint_D x + 2z\,dV,$$

där D är området i första oktanten som ligger under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.
Anm: Första oktanten är området $\{(x,y,z) \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.

7. Beräkna arbetet som vektorfältet (7p)

$$\mathbf{F} = \langle 1 + 2xy^3, 2 + 3x^2y^2 \rangle$$

utför på en partikel som rör sig längs med kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos(\pi t), te^t), \quad 0 \le t \le 1.$$

8. Beräkna masscentrum av ytan S som ges av (8p)

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\},$$

där S antas ha konstant densitet $\rho(x,y,z) = 1$.

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 17/18

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)dudv.$

Om $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ *så är* $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \langle -f_u, -f_v, 1\rangle.$

Masscentrum för kurva C med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \int_C x\rho(x, y, z)ds \text{ osv., och } m = \int_C \rho(x, y, z)ds$$

Masscentrum för parametriserad yta S med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iint_S x\rho(x, y, z)dS \text{ osv., och } m = \iint_S \rho(x, y, z)dS$$

Masscentrum för kropp D med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV \text{ osv., och } m = \iiint_D \rho(x, y, z)dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \langle v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1\rangle.$$

Derivator

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}x^a &= ax^{a-1}, \quad a \neq 0 & \tfrac{d}{dx}e^x &= e^x \\ \tfrac{d}{dx}\sin x &= \cos x & \tfrac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\ \tfrac{d}{dx}\ln x &= \tfrac{1}{x} & \tfrac{d}{dx}\arctan x &= \tfrac{1}{1+x^2} \\ \tfrac{d}{dx}\arcsin x &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \tfrac{d}{dx}\arccos x &= -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \tfrac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) &= f'(x) + g'(x) & \tfrac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \tfrac{d}{dx}(f(g(x))) &= f'(g(x))g'(x) & \tfrac{d}{dx}\tfrac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Integraler

$$\begin{aligned} \int x^a\,dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 & \int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x\,dx &= -\cos x + C & \int \cos x\,dx &= \sin x + C \\ \int \tfrac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C & \int \tfrac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\cot x + C \\ \int e^x\,dx &= e^x + C & \int \tfrac{1}{x^2+a^2}\,dx &= \tfrac{1}{a}\arctan\tfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \\ \int \tfrac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx &= \arcsin\tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 & \int \sqrt{a-x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \tfrac{a}{2}\arcsin\tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \\ \int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 & \int \sqrt{x^2+a}\,dx &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C \end{aligned}$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \text{ där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$