MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare
Datum: 181030 kl. 14:00 - 18:00
Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 3524

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2018/19

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2018 inkluderas.)
Obs: I rättningen bedöms hela lösningen och inte bara svaret, så skriv fullständig lösningar med motiveringar.
Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1819
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. (a) Bestäm lineariseringen till (5p)

$$f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$$

kring $(x, y) = (2, 0)$.

(b) Använd lineariseringen för att approximera $\sqrt{2 \cdot 2.1^2 + e^{2\cdot(-0.1)}}$. (1p)

2. Beräkna gränsvärdet (6p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Bestäm globala maximum och minimum till funktionen $f(x, y) = x+y$, där (x, y) ligger i området D som begränsas av kurvorna $y = 4 - x^2$ och $y = 0$. (6p)

4. Beräkna längden av kurvan C som parametriseras av (6p)

$$\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\sin t\rangle, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Var god vänd!

5. Beräkna (6p)

$$\iint_D xe^y dA,$$

där D är området som begränsas av linjerna $y = 0$ och $x = 1$ och kurvan $y = x^2$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \langle x^2, y^2z, -yz^2 \rangle$, ut ur området som begränsas av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och xy-planet. (6p)

7. Beräkna volymen av området som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. (7p)

8. Beräkna arean av området innanför den enkla slutna positivt orienterade kurvan C som parametriseras av (7p)

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin 2t, \sin t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

skulle stått
<0,x>

förslagsvis genom att använda Green's formel på vektorfältet $\langle \cancel{x, 0} \rangle$.

Obs: För full poäng krävs att du motiverat varför det du räknar ut verkligen ger arean.

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 18/19

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)dudv.$

Om $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v, f(u, v)\rangle$ *så är* $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle -f_u, -f_v, 1\rangle$.

Masscentrum för kurva C med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \int_C x\rho(x, y, z)ds \text{ osv., och } m = \int_C \rho(x, y, z)ds$$

Masscentrum för parametriserad yta S med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iint_S x\rho(x, y, z)dS \text{ osv., och } m = \iint_S \rho(x, y, z)dS$$

Masscentrum för kropp D med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV \text{ osv., och } m = \iiint_D \rho(x, y, z)dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \langle v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1\rangle.$$

Derivator

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}, \quad a \neq 0 \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = f'(x) + g'(x) \qquad \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x) \qquad \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \text{ där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$