MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 190107 kl. 08:30–12:30
Tentamen | Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2018/19

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2018 inkluderas.)
Obs: I rättningen bedöms hela lösningen och inte bara svaret, så skriv fullständig lösningar med motiveringar. Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1819
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. Antag att en partikel rör sig med positionsvektor (5p)

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2\arctan t, \ln(1+t^2)\rangle.$$

Vad är hastigheten, farten och accelerationen av partikeln?

2. Låt

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Beräkna gränsvärdet (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

eller förklara varför det inte existerar.

(b) Låt (3p)

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beskriv i vilka punkter som $f(x,y)$ är kontinuerlig.

3. Bestäm globala maximum och minimum till funktionen (7p)

$$f(x,y) = 2xy^2 - x^2y^2 - xy^3,$$

där (x,y) ligger i området

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}.$$

Var god vänd!

4. Låt (6p)

$$h(s,t) = f(1+\sin(s-t), \arctan(s)),$$

där $f(u,v)$ är en deriverbar funktion så att

$$f(0,0) = 9,\ f_u(0,0) = 8,\ f_v(0,0) = 7$$

och

$$f(1,0) = 6,\ f_u(1,0) = 5,\ f_v(1,0) = 4.$$

Beräkna $h_s(0,0)$ och $h_t(0,0)$.

5. Beräkna (6p)

$$\iint_D xy^2\,dA,$$

där D är området i första kvadranten innanför cirkeln med centrum i origo och radie 3.

6. Beräkna trippelintegralen (6p)

$$\iiint_E 2z\,dV,$$

där $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{9-y^2}, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{y}\}$.

7. Förklara varför arbetet som vektorfältet (7p)

$$\mathbf{F} = \left\langle \frac{2x}{1+x^2+y^2}, 10y + \frac{2y}{1+x^2+y^2} \right\rangle$$

utför på en partikel som rör sig från en punkt till en annan bara beror på start- och slutpunkten (och alltså inte på exakt vilken kurva partikeln rör sig längs mellan punkterna). Beräkna arbetet som $\mathbf{F}$ utför på en partikel som rör sig från $A = (1,0)$ till $B = (1,1)$.

8. Beräkna arean av ytan som parametriseras av $\mathbf{r}(u,v) = \langle 2\cos u, 2\sin u, v\rangle$, där (7p)

$$(u,v) \in D = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2 - \cos^2(u)\}.$$

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 18/19

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)dudv.$

Om $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v, f(u, v)\rangle$ *så är* $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle -f_u, -f_v, 1\rangle$.

Masscentrum för kurva C med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \int_C x\rho(x, y, z)ds \text{ osv., och } m = \int_C \rho(x, y, z)ds$$

Masscentrum för parametriserad yta S med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iint_S x\rho(x, y, z)dS \text{ osv., och } m = \iint_S \rho(x, y, z)dS$$

Masscentrum för kropp D med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV \text{ osv., och } m = \iiint_D \rho(x, y, z)dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \langle v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1\rangle.$$

Derivator

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx}x^a &= ax^{a-1}, \ \ a \neq 0 & \tfrac{d}{dx}e^x &= e^x \\
\tfrac{d}{dx}\sin x &= \cos x & \tfrac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\
\tfrac{d}{dx}\ln x &= \tfrac{1}{x} & \tfrac{d}{dx}\arctan x &= \tfrac{1}{1+x^2} \\
\tfrac{d}{dx}\arcsin x &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \tfrac{d}{dx}\arccos x &= -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\tfrac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) &= f'(x) + g'(x) & \tfrac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\tfrac{d}{dx}(f(g(x))) &= f'(g(x))g'(x) & \tfrac{d}{dx}\tfrac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

Integraler

$$\begin{aligned}
\textstyle\int x^a\,dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ \ a \neq -1 & \textstyle\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \\
\textstyle\int \sin x\,dx &= -\cos x + C & \textstyle\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\textstyle\int \tfrac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C & \textstyle\int \tfrac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\cot x + C \\
\textstyle\int e^x\,dx &= e^x + C & \textstyle\int \tfrac{1}{x^2+a^2}\,dx &= \tfrac{1}{a}\arctan\tfrac{x}{a} + C, \ \ a \neq 0 \\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx &= \arcsin\tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \ \ a > 0 & \textstyle\int \sqrt{a - x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \tfrac{a}{2}\arcsin\tfrac{x}{\sqrt{a}} + C, \ \ a > 0 \\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \ \ a \neq 0 & \textstyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C
\end{aligned}$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \text{ där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$