MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogad formelsamling, ej miniräknare**
Chalmers tekniska högskola Datum: 190822 kl. 08:30–12:30
Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng
031 – 772 5889

LMA017 Matematisk analys i flera variabler – 2018/19

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 poäng eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2018 inkluderas.)
Obs: I rättningen bedöms hela lösningen och inte bara svaret, så skriv fullständig lösningar med motiveringar.
Lösningar läggs ut på kurshemsidan efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lma017/1819
Examinator: Richard Lärkäng

---

1. Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $\{x^3 + x^2y^2 + y^3 = 1\}$ i punkten $(1, -1)$. (5p)

2. Låt
$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \sqrt{x}.$$

(a) Bestäm definitionsmängden till f. (2p)

(b) Om man startar i punkten $(1, 2)$, i vilken riktning skall man gå för att f ska växa som mest? (2p)

(c) Bestäm riktningsderivatan till f i punkten $(1, 2)$ och riktningen $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$. (2p)

3. Ett av de två gränsvärdena (6p)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^8}$$
existerar, och det andra existerar inte. Avgör vilket av gränsvärdena som existerar, och bestäm vad det gränsvärdet är. För det gränsvärdet som inte existerar, förklara varför.

4. Låt
$$f(x, y) = xy \quad \text{och} \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - xy.$$
Bestäm minimum av $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 3$. (7p)

Obs: Du behöver inte motivera varför minimum existerar. Bivillkoret definierar en sned ellips, som är sluten och begränsad, och därför existerar minimum.

Var god vänd!

5. Beräkna (6p)

$$\iint_D \sin(x^2)\, dA,$$

där D är det triangulära området med hörn i $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$.

6. Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x,y,z) = xy^2$ längs kurvan C som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \langle 2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5}t\rangle$, $0 \le t \le \pi$. (6p)

Obs: Om f är en funktion, och C en kurva, så är

$$\text{medelvärdet av } f \text{ längs } C \; = \frac{\int_C f\, ds}{\int_C ds}.$$

7. Beräkna masscentrum av halvcylindern som ges av (6p)

$$E = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le 2, \quad x \ge 0, \quad 0 \le z \le 2\},$$

där E antas ha konstant densitet $\rho = 1$.

8. Låt $\mathbf{F} = \langle x^3, y^3, z^3\rangle$. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur området som begränsas av sfären $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. (8p)

Lycka till!
Richard Lärkäng

Formelsamling LMA017 18/19

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:
$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u,v)$

för integral av funktion:
$dS = |\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)|dudv.$

för integral av vektorfält:
$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)dudv.$

Om $\mathbf{r}(u,v) = \langle u, v, f(u,v)\rangle$ *så är* $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle -f_u, -f_v, 1\rangle$.

Masscentrum för kurva C med densitet $\rho(x,y,z)$

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \int_C x\rho(x,y,z)ds \text{ osv., och } m = \int_C \rho(x,y,z)ds$$

Masscentrum för parametriserad yta S med densitet $\rho(x,y,z)$

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iint_S x\rho(x,y,z)dS \text{ osv., och } m = \iint_S \rho(x,y,z)dS$$

Masscentrum för kropp D med densitet $\rho(x,y,z)$

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right), \text{ där } M_x = \iiint_D x\rho(x,y,z)dV \text{ osv., och } m = \iiint_D \rho(x,y,z)dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Polära koordinater $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$dA = dxdy = rdrd\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x,y,z) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \langle v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1\rangle.$$

Derivator

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}, \quad a \neq 0 \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = f'(x) + g'(x) \qquad \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x) \qquad \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a - x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a\ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \text{ där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$