1. Bestäm tangentplanet till $z = e^{x^2-y^2}$ i punkten $(3, 2, e^5)$.

Tangentplanet av en graf $z = f(x,y)$ i en punkt $(a, b, f(a,b))$ ges av:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Här $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $(a,b) = (3,2)$ och $f(3,2) = e^5$.

$f_x = 2xe^{x^2-y^2}$ $\quad f_x(3,2) = 6e^5$

$f_y = -2ye^{x^2-y^2}$ $\quad f_y(3,2) = -4e^5$

Svar: Tangentplanet är

$$z = e^5 + 6e^5(x-3) - 4e^5(y-2)$$

$$\iff z = 6e^5x - 4e^5y - 9e^5$$

2. Låt

$$g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

eller förklara varför det inte existerar.

(b) Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beskriv i vilka punkter som $f(x,y)$ är kontinuerlig.

Börjar med att förenkla g genom att förlänga med konjugatuttryck:

$$g(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)} \underset{\text{konjugat regeln}}{=} \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}\right)^2-2^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\cancel{x^2+y^2+4-4}} = \sqrt{x^2+y^2+4}+2$$

Eftersom $\sqrt{x^2+y^2+4}+2$ sammansättning av elementära funktioner och definierad överallt så är den kontinuerlig överallt och

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+4}+2 = \sqrt{0+0+4}+2 = 4.$$

<u>Svar:</u> $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 4.$

b) Utanför $(0,0)$ är $f(x,y)=g(x,y)$ och täljaren och nämnaren är elementära funktioner av x och y som då är kontinuerliga överallt. Då blir kvoten kontinuerlig så länge nämnaren inte är 0, dvs

$$\sqrt{x^2+y^2+4}-2 \neq 0 \iff \sqrt{x^2+y^2+4} \neq 2 \iff x^2+y^2+\cancel{4} \neq \cancel{4} \iff x^2+y^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0).$$

Så $f(x,y)$ är kontinuerlig utanför $(0,0)$.

I $(0,0)$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 4 \neq 2 = f(0,0)$

(enl. a)

Så f är <u>inte</u> kontinuerlig i $(0,0)$

<u>Svar:</u> f är kontinuerlig överallt förutom i $(0,0)$.

3. Avgör vilka av följande funktioner $f(x,t)$ som löser vågekvationen $f_{tt}(x,y) = c^2 f_{xx}(x,y)$.

(a) $\cos((x+ct)^2)$

(b) $e^{x^2-c^2t^2}$

---

a) $f(x,t) = \cos((x+ct)^2)$

$f_x = -\sin((x+ct)^2)\cdot 2(x+ct)$ (kedjeregeln)

$f_{xx} = -\cos((x+ct)^2)\cdot(2(x+ct))^2 - \sin((x+ct)^2)\cdot 2$

(kedjeregeln och produktregeln)

$f_t = -\sin((x+ct)^2)\cdot 2(x+ct)\cdot c$

$f_{tt} = -\cos((x+ct)^2)\cdot(2(x+ct)\cdot c)^2 - \sin((x+ct)^2)\cdot 2c^2 = c^2 f_{xx}$.

<u>Svar:</u> $\cos((x+ct)^2)$ är en lösning till vågekvationen.

b) $f(x,y) = e^{x^2-c^2t^2}$

$f_x = 2x e^{x^2-c^2t^2}$ $f_{xx} = 2e^{x^2-c^2t^2} + (2x)^2 e^{x^2-c^2t^2}$

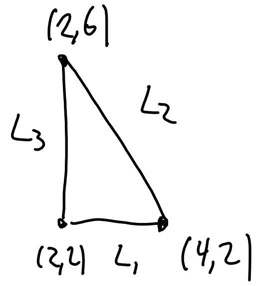
$f_t = -c^2\cdot 2t e^{x^2-c^2t^2}$ $f_{tt} = -c^2\cdot 2e^{x^2-c^2t^2} + (-c^2\cdot 2t)^2 e^{x^2-c^2t^2}$

$\neq c^2 f_{xx}$

<u>Svar:</u> $e^{x^2-c^2t^2}$ löser <u>inte</u> vågekvationen.

4. Låt $f(x, y) = xy$. Bestäm maximum och minimum av $f(x, y)$ när (x, y) ligger i den slutna triangeln med hörn i $(2, 2)$, $(2, 6)$ och $(4, 2)$.

Ritar triangeln:



Kandidater till max och min:

1) Kritiska punkter: $\begin{cases} f_x = y = 0 \\ f_y = x = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$ <u>ej</u> i triangeln.

<u>Inga</u> kritiska punkter i området.

2) Kritiska punkter längs randkurvorna L_1, L_2 och L_3.

L_1 kan parametriseras $\mathbf{r}_1(t) = (t, 2)$ $\quad 2 \le t \le 4$

$g_1(t) = f(\mathbf{r}_1(t))$ $\qquad g_1'(t) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ ingen krit. pkt.

L_2 kan parametriseras $\mathbf{r}_2(t) = (2, t)$ $\quad 2 \le t \le 6$

$g_2(t) = f(\mathbf{r}_2(t)) = 2t$, $\qquad g_2'(t) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ ingen krit. pkt.

L_3 kan parametriseras $\mathbf{r}_3(t) = (2,6) + t\overbrace{\langle 4-2, 2-6 \rangle}^{\text{vektorn från } (2,6) \text{ till } (4,2)} =$

$= (2+2t, 6-4t)$, $\quad 0 \le t \le 1$.

$g_3(t) = (2+2t)(6-4t) = 12 + 12t - 8t - 8t^2 = 12 + 4t - 8t^2$

$g_3'(t) = 4 - 16t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ en krit. pkt.

$g_3(\frac{1}{4}) = f(2 + \frac{1}{2}, 6 - 1) = \boxed{f(\frac{5}{2}, 5) = \frac{25}{2}}$

3) "Hörn", dvs ändpunkterna av L_1, L_2, L_3:

$$\boxed{f(2,2) = 4}$$

$$\boxed{f(2,6) = 12}$$

$$\boxed{f(4,2) = 8}$$

Jämför kandidaterna i 1), 2) och 3).

<u>Svar:</u> Max $\frac{25}{2}$ i $(\frac{5}{2}, 5)$ och min 4 i $(2,2)$

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 4e^{2z}\,ds,$$

där C är kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, t), \quad 0 \le t \le \ln 2.$$

Kurva C par. av $\mathbf{r}(t)$, då är $ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt$,

$$\mathbf{r}'(t) = \langle e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ 1\rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(e^t(\cos t - \sin t))^2 + (e^t(\sin t + \cos t))^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t\sin t} + \sin^2 t) + e^{2t}(\cos^2 t + \cancel{2\cos t\sin t} + \sin^2 t) + 1}$$

$$\underset{\text{(trig.ettan)}}{=} \sqrt{2e^{2t}+1}$$

$$\int_C 4e^{2z}\,ds = \int_0^{\ln 2} 4e^{2t}\sqrt{2e^{2t}+1}\,dt = \left\{\begin{array}{l} s = 2e^{2t}+1 \\ ds = 4e^{2t}dt \\ t=0 \Rightarrow s=3 \\ t=1 \Rightarrow s = 2e^{2\ln 2}+1 = 2\cdot 2^2+1 = 9 \end{array}\right\} =$$

$$= \int_3^9 \sqrt{s}\,ds = \left[\frac{s^{3/2}}{3/2}\right]_3^9 = \frac{2}{3}\left(9^{3/2} - 3^{3/2}\right) = \frac{2}{3}\left(3^3 - (\sqrt{3})^3\right)$$

Svar: $\frac{2}{3}\left(3^3 - (\sqrt{3})^3\right) = 18 - 2\sqrt{3}$

6. Beräkna dubbelintegralen

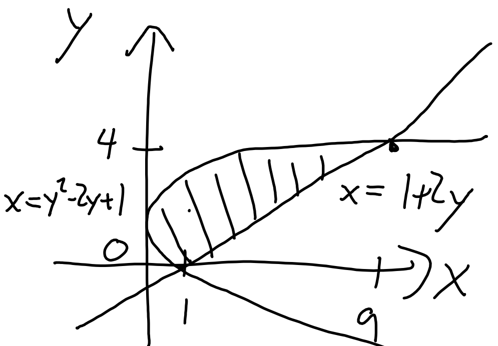
$$\iint_D 3y\,dA,$$

där D är det begränsade området som ligger mellan kurvorna $x = y^2 - 2y + 1$, $x = 1 + 2y$.

Kurvorna skär varandra då

$y^2 - 2y + 1 = x = 1 + 2y \iff y^2 - 4y = 0 \iff y(y-4) = 0 \iff y = 0$ el. $y = 4$.

Ritar kurvorna:



(utan att rita grafen, kan också se t.ex. i $y=2$ att $2^2 - 2\cdot 2 + 1 = 1 < 1 + 2\cdot 2$
så $y^2 - 2y + 1 < 1 + 2y$ när $0 < y < 4$)

Så $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 4,\ y^2 - 2y + 1 \le x \le 1 + 2y\}$.

och enligt formeln för upprepad integration:

$$\iint_D 3y\,dA = \int_0^4 \int_{y^2-2y+1}^{1+2y} 3y\,dx\,dy = \int_0^4 3y\left(\cancel{1} + 2y - (y^2 - 2y + \cancel{1})\right)dy = \int_0^4 12y^2 - 3y^3\,dy$$

$$= \left[4y^3 - \frac{3y^4}{4}\right]_0^4 = 4^4 - \frac{3\cdot 4^4}{4} = 4^4 - 3\cdot 4^3 = 4^3$$

Svar: 64

7. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F} = \langle xe^{xy} - e^y, e^x - ye^{xy}, 2\rangle.$$

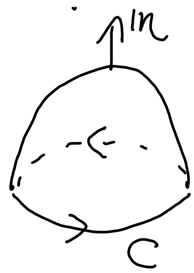
upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$. Det kan underlätta att veta att

$$\mathbf{F} = \mathrm{rot}\langle ze^x - y, ze^y + x, e^{xy}\rangle.$$

Enligt Stokes sats, om S halvsfären och $C = \partial S$ den positiva randen till S och $\mathbb{G} = \langle ze^x - y, ze^y + x, e^{xy}\rangle$, s.a. $\mathbb{F} = \mathrm{rot}\,\mathbb{G}$, då är

flödet av $\mathbb{F}$ genom $S = \iint_S \mathrm{rot}\,\mathbb{G} \bullet d\mathbb{S} = \int_C \mathbb{G} \bullet d\mathbb{r}$.

Randen till halvsfären är när $z=0$, s.a. $x^2+y^2=4$, så kan parametriseras $\mathbb{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



C går moturs sett uppifrån, så är positivt orienterad.

Så $\int_C \mathbb{G} \bullet d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \mathbb{G}(\cos t, \sin t, 0) \bullet \mathbb{r}'(t)\,dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \langle -2\sin t, 2\cos t, e^{4\cos t \sin t}\rangle \bullet \langle -2\sin t, 2\cos t, 0\rangle\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sin^2 t + 4\cos^2 t\,dt \underset{\text{(trig. ettan)}}{=} \int_0^{2\pi} 4\,dt = 8\pi.$$

Svar: 8π.

8. Beräkna masscentrum av den delen E av klotet $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ som ligger i första oktanten (dvs., där $x \ge 0, y \ge 0$ och $z \ge 0$). E antas ha konstant densitet $\rho(x,y,z) = 1$.

Masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right)$, där $m = \iiint_E dV$ och

$M_x = \iiint_E x\,dV$ osv. $(\rho(x,y,z) = 1)$

E i sfäriska koordinater: • $x^2+y^2+z^2 \le 1 \iff 0 \le \rho \le 1$.

• $z \ge 0 \iff 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

• $x, y \ge 0 \iff 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Enligt formeln för integration i sfäriska koordinater,

$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho$:

$$m = \iiint_E dV = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \sin\phi \, d\phi \, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^2 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$M_x = \iiint_E x\,dV = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho \sin\phi \cos\theta \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2\phi \left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} d\phi \, d\rho = \left\{ \sin^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \frac{1-\cos 2\phi}{2} d\phi \, d\rho = \int_0^1 \rho^3 \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_0^{\pi/2} d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

Av symmetriskäl, $M_x = M_y = M_z$,

så $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\pi/16}{\pi/6}, \frac{\pi/16}{\pi/6}, \frac{\pi/16}{\pi/6} \right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8} \right)$