# Lösningar, Tenta 2018-08-23, LMA017

**1.** Låt $C$ vara kurvan som är skärningen mellan ytan $y = z^2\ln(1+x)$ och planet $x+z=2$.

(a) Bestäm en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av kurvan $C$.

(b) Beskriv en formel för tangentlinjen till $C$ i punkten $(1, \ln 2, 1)$.

---

a) Vi skall hitta alla lösningar till

$$\begin{cases} y = z^2 \ln(1+x) & (1) \\ x+z = 2 & (2) \end{cases}$$

y bestäms av x och z ; (1)
och kan bestämma z av x ; (2).
Inför därför parametrisering:

$$x = t.$$

$$(2) \Rightarrow \quad x+z=2 \Leftrightarrow z = 2-x = 2-t.$$

$$(1) \Rightarrow \quad y = z^2\ln(1+x) = (2-t)^2 \ln(1+t).$$

<u>Svar:</u> Skärningen kan parametriseras t.ex. av

$$\mathbf{r}(t) = (t, (2-t)^2\ln(1+t), 2-t)$$

(andra svar är också möjliga)

b) Tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r}(t)$ i en punkt $\mathbf{r}(t_0)$ ges av

$$L(s) = \mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{r}'(t_0).$$

Hitta $\mathbf{r}(t_0)$: $\quad \mathbf{r}(t_0) = (t_0, t_0^2\ln(1+t_0), 2-t_0) = (1, \ln 2, 1)$

$$\Rightarrow t_0 = 1.$$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1,\ 2(2-t)\cdot(-1)\ln(1+t) + (2-t)^2\cdot\frac{1}{1+t},\ -1\rangle$$

$$\mathbf{r}'(1) = \langle 1,\ -2\ln 2 + \frac{1}{2},\ -1\rangle.$$

Svar: Tangentlinjen ges av

$$L(s) = (1, \ln 2, 1) + s\langle 1, -2\ln 2 + \frac{1}{2}, -1\rangle$$
$$= (1+s,\ \ln 2 + s(-2\ln 2 + \tfrac{1}{2}),\ 1-s).$$

**2.** Låt $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 3e^{x^2+y^2-z^2}}$.

(a) Bestäm i vilken riktning som $f$ växer mest i punkten $(3, 4, 5)$.

(b) Beräkna riktningsderivatan av $f$ i punkten $(3, 4, 5)$ och riktningen $\mathbf{v} = \langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$.

---

a) Växer mest i gradientens riktning: $\dfrac{\nabla f(3,4,5)}{|\nabla f(3,4,5)|}$.

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{1+3e^{x^2+y^2-z^2}}} \frac{\partial}{\partial x}\left(1+3e^{x^2+y^2-z^2}\right) =$$

$$= \frac{3 \cdot \cancel{2} x e^{x^2+y^2-z^2}}{\cancel{2}\sqrt{1+3e^{x^2+y^2-z^2}}}.$$

Analogt: $$f_y = \frac{3ye^{x^2+y^2-z^2}}{\sqrt{1+3e^{x^2+y^2-z^2}}}$$

$$f_z = \frac{-3ze^{x^2+y^2-z^2}}{\sqrt{1+3e^{x^2+y^2-z^2}}}.$$

$$\Rightarrow \nabla f = \frac{3e^{x^2+y^2-z^2}}{\sqrt{1+3e^{x^2+y^2-z^2}}}\langle x, y, -z\rangle.$$

$$\nabla f(3,4,5) = \frac{3}{\sqrt{1+3}}\langle 3, 4, -5\rangle$$

$$= \frac{3}{2}\langle 3, 4, -5\rangle.$$

$$|\nabla f(3,4,5)| = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{9+16+25} = \frac{3}{2}\sqrt{50}.$$

Svar: $f$ växer mest i riktningen

$$\frac{\cancel{\tfrac{3}{2}}(3,4,-5)}{\cancel{\tfrac{3}{2}}\sqrt{50}} = \frac{(3,4,-5)}{\sqrt{50}}.$$

b) Riktningsderivatan av $f$ i $(3,4,5)$ i riktningen av en enhetsvektor $v$ ges av

$$D_v f(3,4,5) = v \bullet \nabla f(3,4,5).$$

$$v = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = 1$$

så $v$ enhetsvektor.

$$v \bullet \nabla f(3,4,5) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \bullet \frac{3}{2}(3,4,-5) =$$

$$= \frac{1}{2}(-3+8-10) = -\frac{5}{2}.$$

Svar: Riktningsderivatan är $-\frac{5}{2}$.

**3**. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) e^{2x},$$

och avgör om dessa punkter är lokala maximum, minimum eller sadelpunkter.

---

Kritiska punkter: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f_x = 2x e^{2x} + 2(x^2 - y^2) e^{2x} = 2(x + x^2 - y^2) e^{2x} = 0 \\ f_y = -2y e^{2x} = 0 \end{cases}$$

$$\underset{(e^{2x} \neq 0)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + x^2 - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + x^2 = x(1+x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ el. } x = -1. \\ y = 0 \end{cases}$$

Så kritiska punkter är $(-1, 0)$ och $(0, 0)$.

Undersöker dessa med hjälp av andraderivatatestet.

$$f_{xx} = 2(1 + 2x) e^{2x} + 4(x + x^2 - y^2) e^{2x} = 2(1 + 4x + 2x^2 - 2y^2) e^{2x}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -4y e^{2x}$$

$$f_{yy} = -2 e^{2x}$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$\underline{(-1,0)}$: $H(-1,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}$

$$\det H(-1,0) = (-2e^{-2})(-2e^{-2}) = 4e^{-4} > 0$$

$$f_{xx}(-1,0) = -2e^{-2} < 0$$

$\Rightarrow (-1,0)$ ett <u>lokalt max</u>.

$\underline{(0,0)}$: $H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det H(0,0) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ sadelpunkt.

<u>Svar</u>: De kritiska punkterna är:

$(-1,0)$ som är ett lokalt maximum

och $(0,0)$ som är en sadelpunkt.

**4.** Beräkna längden av kurvan

$$\mathbf{r}(t) = \left(1 + \ln t, t^2 - 1, 1 + 2t\right),$$

där $1/2 \le t \le 3$.

---

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{1}{t}, 2t, 2 \right\rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4t^2 + 4} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} + 2t\right)^2} =$$

$= \frac{1}{t} + 2t$ om $\frac{1}{t} + 2t > 0$, vilket är uppfyllt om $\frac{1}{2} \le t \le 3$.

Längden blir då

$$\int_{1/2}^{3} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_{1/2}^{3} \frac{1}{t} + 2t\,dt =$$

$$= \left[\ln|t| + t^2\right]_{1/2}^{3} = \ln 3 + 9 - \ln 1/2 - \frac{1}{4}$$

Svar: längden är $\ln 3 + 9 - \ln 1/2 - \frac{1}{4} =$
$= \ln 6 + \frac{35}{4}$ (längdenheter)

**5**. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D y\cos(xy)\,dA,$$

där $D = \{(x,y) \mid 2 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

---

$$\iint_D y\cos(xy)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_2^3 y\cos(xy)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \Big[\sin(xy)\Big]_{x=2}^{x=3} dy = \int_0^{\pi/2} \sin(3y) - \sin(2y)\,dy =$$

$$= \left[-\frac{\cos(3y)}{3} + \frac{\cos(2y)}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\underbrace{\cos(3\pi/2)}_{=0}/3 + \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}/2$$

$$-\left(-\underbrace{\cos(0)}_{=1}/3 + \underbrace{\cos(0)}_{=1}/2\right) =$$

$$= -1/2 - 1/6 = -2/3.$$

<u>Svar</u>: $-\frac{2}{3}$.

**6**. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_D x + 2z\, dV,$$
där $D$ är området i första oktanten som ligger under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.
*Anm*: Första oktanten är området $\{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

---

Om $z = 1 - x^2 - y^2$ och $(x,y,z)$ ligger i första oktanten så måste

$$0 \leq z = 1 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 \leq 1$$

och $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Alltså ges $D$ av $0 \leq x$, $0 \leq y$, $x^2 + y^2 \leq 1$,
$0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$.

I cylindriska koordinater blir det:

$0 \leq \theta \leq \pi/2$,
$0 \leq r \leq 1$,
$0 \leq z \leq 1 - r^2$.

Enligt formeln för integration i cylindriska koordinater, $dV = r\,dz\,d\theta\,dr$, blir då

$$\iiint_D x + 2z\, dV = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{1-r^2} (r\cos\theta + 2z)\, r\,dz\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \Big[ r\cos\theta\, z + z^2 \Big]_{z=0}^{z=1-r^2} r\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left( r(1-r^2)\cos\theta + r(1-r^2)^2 \right) r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^1 \left[ (r^2 - r^4)\sin\theta + (r - 2r^3 + r^5)\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} dr$$

$$= \int_0^1 r^2 - r^4 + \frac{\pi}{2}(r - 2r^3 + r^5)\, dr$$

$$= \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} + \frac{\pi}{2}\left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{6} \right) \right]_{r=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{\pi}{2}\left( \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \right) =$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{\pi}{12}$$

$\underline{\text{Svar:}}$ $\frac{2}{15} + \frac{\pi}{12}$.

**7**. Beräkna arbetet som vektorfältet

$$\mathbf{F} = \langle 1 + 2xy^3, 2 + 3x^2y^2 \rangle$$

utför på en partikel som rör sig längs med kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos(\pi t), te^t), \quad 0 \le t \le 1.$$

---

Kollar om $\mathbb{F}$ konservativt:

$\mathbb{F} = (P, Q)$ konservativt på $\mathbb{R}^2$ om $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \mathbb{F} \text{ konservativt.}$$

Hittar potential: $\begin{cases} f_x = 1 + 2xy^3 & (1) \\ f_y = 2 + 3x^2y^2 & (2). \end{cases}$

(1) har en lösn. $f_0 = x + x^2y^3$

$\Rightarrow$ allm. lösn. $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) =$
$= x + x^2y^3 + g(y).$

Sätter in i (2):

$$f_y = (f_0)_y + g'(y) = 3x^2y^2 + g'(y) \underset{(2)}{=} 2 + 3x^2y^2$$

$$\Rightarrow g'(y) = 2 \Rightarrow g(y) = 2y + C$$

Så en potential till $\mathbb{F}$ är $f = x + x^2y^3 + 2y$.

Arbetet av $\mathbb{F}$ längs kurva $C$ definierad av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$

ges av
$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}(t).$$

Om $\mathbb{F} = \nabla f$ så är enligt huvudsatsen för kurvintegraler:

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}(t) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(b)).$$

I detta fallet är $\mathbf{r}(t) = (1 - \cos(\pi t), te^t)$

så $\mathbf{r}(1) = (1-(-1), e) = (2, e)$,

$\mathbf{r}(0) = (1-1, 0) = (0,0)$

arbetet blir $W = f(2,e) - f(0,0) = 2 + 4e^3 + 2e$

Svar: $2 + 2e + 4e^3$.

**8**. Beräkna masscentrum av ytan $S$ som ges av

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\},$$

och $S$ antas ha konstant densitet $\rho(x,y,z) = 1$.

---

Ytan är en graf, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$,

så kan parametriseras $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in D$

Då är $dS = \sqrt{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}\, dA = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\, dA$.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

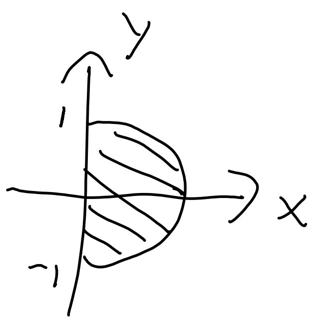
$$\Rightarrow dS = \sqrt{2}\, dA.$$

Masscentrum är $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, där $\bar{x} = \frac{M_x}{m}$ osv,

med $m = \iint_S \rho\, dS = \iint_D \sqrt{2}\, dA = \left\{ \begin{array}{l} D \text{ halv cirkelskiva} \\ \text{med radie } 1 \\ \Rightarrow \text{area } \pi/2 \end{array} \right\}$

$= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

<u>D:</u>



D ges i polära koord. av $0 \le r \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Enligt formeln för integration i polära koord. $dA = r d\theta dr$ blir då

$$M_x = \iint_S x \rho \, dS = \iint_D x\sqrt{2}\, dA = \sqrt{2}\int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta \, r \, d\theta \, dr =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 r^2 \left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dr = \sqrt{2}\cdot 2 \left[r^3/3\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{3}.$$

Eftersom $M_y$ symmetrisk om speglar kring x-axeln, alt. med räkningar som ovan blir $M_y = 0$.

Slutligen, i polära koord, om $(x,y,z) \in S$:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r$$
$$(r \ge 0)$$

så

$$M_z = \iint_S z \rho \, dS = \sqrt{2}\int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 d\theta \, dr =$$

$$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\int_0^1 r^2 dr = \sqrt{2}\cdot\pi \left[r^3/3\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3}.$$

Svar: Masscentrum är $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{2\cancel{\sqrt{2}}/3}{\cancel{\sqrt{2}}\pi/2}, 0, \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\pi}/3}{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\pi}/2}\right) = \left(\frac{4}{3\pi}, 0, \frac{2}{3}\right)$