Lösningar, Tenta 2018-10-30, LMA017

1. (a) Bestäm lineariseringen till

$$f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$$

kring $(x,y)=(2,0)$.

(b) Använd lineariseringen för att approximera $\sqrt{2\cdot 2.1^2+e^{2\cdot(-0.1)}}$.

---

a) $f_x = \dfrac{\cancel{2}\cdot 2x}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+e^{2y}}}$ $\qquad f_x(2,0)=\dfrac{4}{\sqrt{8+1}}=\dfrac{4}{3}$

$f_y = \dfrac{\cancel{2}e^{2y}}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+e^{2y}}}$ $\qquad f_y(2,0)=\dfrac{1}{3}$

$f(2,0)=3$

Lineariseringen kring $(2,0)$:

$$L(x,y)=f(2,0)+f_x(2,0)(x-2)+f_y(2,0)(y-0)$$

$$=3+\frac{4}{3}(x-2)+\frac{1}{3}(y-0)=$$

$$\left(=\frac{1}{3}+\frac{4x}{3}+\frac{y}{3}\right)$$

Svar: Lineariseringen är $L(x,y)=3+\frac{4}{3}(x-2)+\frac{1}{3}(y-0)$.

b) Det som skall approximeras är $f(2.1,-0.1)$

$$f(2.1,-0.1)\approx L(2.1,-0.1)=3+\frac{4}{3}\cdot 0.1-\frac{1}{3}\cdot 0.1=3.1$$

Svar: $\sqrt{2\cdot 2.1^2+e^{2\cdot(-0.1)}}\approx 3.1$

(verkligt värde 3,1046...)

2. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$$

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2} \geq |y| \\ \Rightarrow \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \end{array} \right)$$

så om vi låter $f(x,y) = -|x|$

$$g(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$h(x,y) = |x|$$

är $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$.

Eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$

så är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ enligt instängningsregeln.

<u>Svar:</u> $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

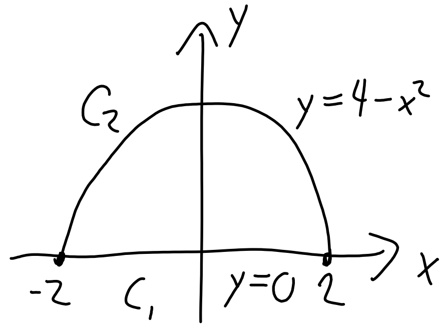
3. Bestäm globala maximum och minimum till funktionen $f(x,y) = x+y$, där (x,y) ligger i området D som begränsas av kurvorna $y = 4 - x^2$ och $y = 0$.

Maximum och minimum fås genom att jämföra värden i följande kandidater:

1) Kritiska punkter till f i D:

$$\begin{cases} f_x = 1 = 0 \\ f_y = 1 = 0 \end{cases} \Leftarrow \text{saknar lösningar} \Rightarrow \text{inga krit. punkter.}$$

2) Parametriserar randen:



a) Kritiska punkter längs randkurvor:

$\underline{C_1}$: par. av $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle$, $-2<t<2$

$g_1(t) = f(\mathbf{r}_1(t)) = t$.

$g_1'(t) = 1 = 0$ saknar lösn. $\Rightarrow$ inga krit. punkter.

$\underline{C_2}$: $y = 4 - t^2$ skär x-axeln när $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$,

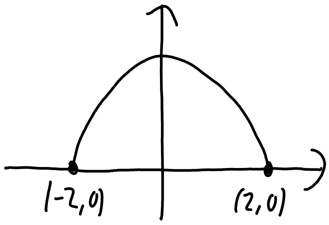
så C_2 par. av $\mathbf{r}_2(t) = \langle t, 4-t^2\rangle$, $-2<t<2$.

$g_2(t) = f(\mathbf{r}_2(t)) = t + 4 - t^2$

$g_2'(t) = 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$.

Kandidat: $\boxed{g_2(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{15}{4}) = \tfrac{17}{4}}$.

b) "Hörn", dvs. ändpunkter till randkurvor:



Kandidater: $\boxed{f(-2,0) = -2}$ $\boxed{f(2,0) = 2}$

Svar: f har max $\frac{17}{4}$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$

och min -2 i $(-2,0)$.

4. Beräkna längden av kurvan C som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\sin t\rangle, \quad 0 \le t \le \pi.$$

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle \cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t\rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2\cos t\sin t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}(1+t^2)} = \sqrt{1+t^2}.$$

så

$$l = \int_C ds = \int_0^\pi \sqrt{1+t^2}\,dt = \underset{\text{(formelblad)}}{} \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi\sqrt{1+\pi^2} + \ln\left(\pi + \sqrt{1+\pi^2}\right)\right)$$

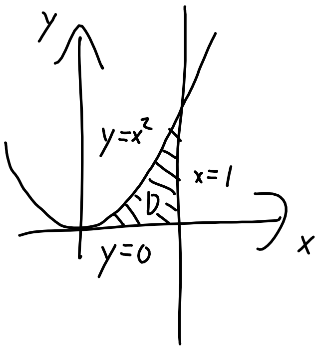
Svar: $\frac{1}{2}\left(\pi\sqrt{1+\pi^2} + \ln\left(\pi + \sqrt{1+\pi^2}\right)\right)$ (längdenheter)

5. Beräkna

$$\iint_D xe^y \, dA,$$

där D är området som begränsas av linjerna $y = 0$ och $x = 1$ och kurvan $y = x^2$.

Ritar området:



Ser att

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}, \quad \text{så}$$

$$\iint_D xe^y dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y dy\, dx = \int_0^1 \left[xe^y\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2} dx - \int_0^1 x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} s = x^2 \text{ i första integralen} \\ ds = 2x\,dx \\ x=0 \Rightarrow s=0 \\ x=1 \Rightarrow s=1 \end{array} \right\} = \int_0^1 e^s \frac{ds}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^s\right]_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

Svar: $\frac{e}{2} - 1$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \langle x^2, y^2z, -yz^2\rangle$, ut ur området som begränsas av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

$z = 1 - x^2 - y^2$ skär xy-planet när $1 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Området som ytorna begränsar är då

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\},$$

där $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

Om S är randen till E är flödet av $\mathbf{F}$ ut ur E:

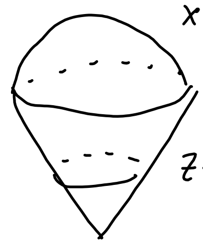
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(divergens-} \\ \text{satsen)}}}{=} \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E 2x + \cancel{2yz} - \cancel{2yz}\, dV = \iint_D \int_0^{1-x^2-y^2} 2x\, dz\, dA =$$

$$= \iint_D 2x(1 - x^2 - y^2)\, dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{polära koord.} \\ dA = r\,d\theta\,dr \\ D: 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r\cos\theta\,(1 - r^2)\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^1 2r(1 - r^2) \left[\sin\theta\right]_0^{2\pi} dr = 0.$$

<u>Svar:</u> Flödet är 0.

7. Beräkna volymen av området som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och innanför sfären $x^2+y^2+z^2 = 9$.



Konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ fås genom att rotera $z=x$ kring x-axeln. Linjen $z=x$ har vinkel $\pi/4$ till pos. z-axeln, så därför ges området ovanför konen i sfäriska koord. av

$$0 \le \phi \le \pi/4.$$

Sfären $x^2+y^2+z^2=9$ är i sfäriska koord: $\rho=3$, så området innanför ges då av $0 \le \rho \le 3$.

Området E ovanför konen och innanför sfären ges då i sfäriska koord. av

$$0 \le \rho \le 3, \quad 0 \le \phi \le \pi/4, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

(inga villkor på θ, så alla vinklar)

Då blir volymen av området

$$\iiint_E dV = \left\{ \begin{array}{l} \text{sfäriska} \\ \text{koord.} \\ dV = \rho^2 d\theta d\phi d\rho \end{array} \right\} = \int_0^3 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\theta d\phi d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^3 \int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin\phi \, d\phi d\rho = 2\pi \int_0^3 \left[-\cos\phi \right]_0^{\pi/4} d\rho = 2\pi\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}+1\right) \int_0^3 \rho^2 d\rho = \pi(2-\sqrt{2}) \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 =$$

$$= 9\pi(2-\sqrt{2})$$

Svar: $9\pi(2-\sqrt{2})$ (volymenheter)

Alternativ lösning med cylindriska koord:

Ytorna ges i cylindriska koord. av $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$ (konen)

och $r^2+z^2=9$ (sfären)

De skär varandra då $r^2=z^2=9-r^2 \iff 2r^2=9 \iff r=\frac{3}{\sqrt{2}}$

Området E mellan ytorna ges då av:

$$0 \le r \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\underset{\substack{\text{ovanför}\\ \text{konen}}}{\underset{\uparrow}{r}} \le z \le \underset{\substack{\text{innanför}\\ \text{sfären}}}{\underset{\uparrow}{\sqrt{9-r^2}}}$$

Enligt formeln för integration i cylindriska koord. blir då

$$\iiint_E dV = \int_0^{3/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{9-r^2}} \int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dz\,dr = 2\pi \int_0^{3/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr = 2\pi \int_0^{3/\sqrt{2}} r\left(\sqrt{9-r^2}-r\right)dr$$

$$=2\pi\left(\int_0^{3/\sqrt{2}} r\sqrt{9-r^2}\,dr - \int_0^{3/\sqrt{2}} r^2\,dr\right) = \left\{\begin{array}{l} s=9-r^2 \text{ i 1:a int.} \\ ds=-2r\,dr \\ r=0 \Rightarrow s=9 \\ r=\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow s=\frac{9}{2} \end{array}\right\} = 2\pi\left(-\int_9^{9/2} \sqrt{s}\,\frac{ds}{2} - \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{3/\sqrt{2}}\right) =$$

$$=2\pi\left(\left[-\frac{s^{3/2}}{\cancel{2}\cdot 3/\cancel{2}}\right]_9^{9/2} - \frac{(3/\sqrt{2})^{3/2}}{3}\right) = 2\pi\left(-\frac{\overbrace{(9/2)^{3/2}}^{=(3/\sqrt{2})^3}}{3} + \frac{\overbrace{9^{3/2}}^{=27}}{3} - \frac{(3/\sqrt{2})^3}{3}\right) =$$

$$= 2\pi\left(9 - 2\,\frac{(3/\sqrt{2})^3}{3}\right) = 2\pi\left(9-\frac{9}{\sqrt{2}}\right) = 9\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

8. Beräkna arean av området innanför den enkla slutna positivt orienterade kurvan C som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin 2t, \sin t \rangle, \quad 0 \le t \le \pi,$$

förslagsvis genom att använda Green's formel på vektorfältet ~~$\langle x, 0 \rangle$~~. skulle stått: $\langle 0, x \rangle$

Obs: För full poäng krävs att du motiverat varför det du räknar ut verkligen ger arean.

Om D är området som begränsas av C, och

$\mathbb{F} = \langle P, Q \rangle = \langle 0, x \rangle$

$$\iint_D 1\, dA = \underbrace{\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_C P\,dx + Q\,dy}_{\text{(Greens formel)}} = \int_0^{\pi} \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \langle 0, \sin(2t) \rangle \bullet \langle 2\cos(2t), \cos(t) \rangle\, dt = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(2t)}_{=2\sin t \cos t} \cos(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2\sin t \cos^2 t\, dt = \left\{ \begin{array}{l} s = \cos t \\ ds = -\sin t\, dt \\ t = 0 \Rightarrow s = 1 \\ t = \pi \Rightarrow s = -1 \end{array} \right\} = -\int_1^{-1} 2s^2\, ds = -\left[\frac{2s^3}{3} \right]_1^{-1} =$$

$$= -\frac{-2}{3} - \frac{-2}{3} = \frac{4}{3}.$$

<u>Svar:</u> $\frac{4}{3}$ (areaenheter)