Lösningar, Tenta 2019-01-07, LMA017

1. Antag att en partikel rör sig med positionsvektor

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2\arctan t, \ln(1+t^2)\rangle.$$

Vad är hastigheten, farten och accelerationen av partikeln?

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right\rangle$$

$$\mathbf{r}''(t) = \left\langle \frac{2}{(1+t^2)^2}\cdot(-1)\cdot 2t, \frac{2(1+t^2) - 2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2} \right\rangle$$

(kedje- och kvotregeln)

$$|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t^2}{(1+t^2)^2}} = 2\sqrt{\frac{\cancel{1+t^2}}{(1+t^2)\cancel{^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

Svar: Hastighet $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right\rangle$.

Fart: $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$

Acceleration: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left\langle \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right\rangle$

2. Låt

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

eller förklara varför det inte existerar.

(b) Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beskriv i vilka punkter som $f(x,y)$ är kontinuerlig.

---

a) Jämför gränsv. längs olika räta linjer genom origo.

Längs x-axeln: $\mathbb{r}_1(t) = \langle t, 0 \rangle$, $t \to 0 \Rightarrow \mathbb{r}_1(t) \to (0,0)$.

$$f(\mathbb{r}_1(t)) = \frac{t \cdot 0}{t^2+0} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Längs linjen $y=x$: $\mathbb{r}_2(t) = (t,t)$, $t \to 0 \Leftrightarrow \mathbb{r}_2(t) \to (0,0)$

$$f(\mathbb{r}_2(t)) = \frac{t \cdot t}{t^2+t^4} = \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

Eftersom vi får olika gränsv. när närmar sig $(0,0)$ längs olika räta linjer så existerar inte $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

Svar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existerar ej.

b) f är kontinuerlig utanför $(0,0)$, eftersom den där är ett bråk av två polynom som är kontinuerliga överallt, och nämnaren är $\neq 0$ när $(x,y) \neq (0,0)$ så då blir också bråket kontinuerligt. Eftersom $f = g$ utanför $(0,0)$ och $g(x,y)$ inte har ett gränsvärde när $(x,y) \to (0,0)$ så har heller inte f det, och då kan f inte vara kontinuerlig i $(0,0)$.

Svar: f är kontinuerlig i alla punkter förutom $(0,0)$.

3. Bestäm globala maximum och minimum till funktionen

$$f(x, y) = 2xy^2 - x^2y^2 - xy^3,$$

där (x, y) ligger i området

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Maximum och minimum fås genom att jämföra värden i följande kandidater:

1) Kritiska punkter till f i D:

$$\begin{cases} f_x = 2y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 & (1) \\ f_y = 4xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Om $x=0$ el $y=0$ är vi antingen på randen, vilket kommer med i 2), eller utanför D.
Alltså kan vi här anta att $x \neq 0$ och $y \neq 0$ och då dela med y^2 i (1) och xy i (2).

$$\begin{cases} 2 - 2x - y = 0 \iff y = 2 - 2x & (1') \\ 4 - 2x - 3y = 0 & (2') \end{cases}$$

Sätter in (1') i (2'):

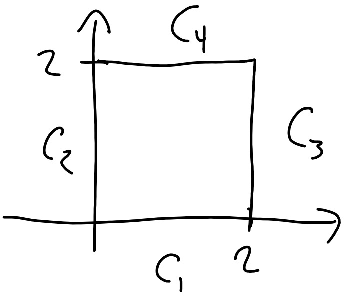
$$4 - 2x - 3(2-2x) = 0 \iff 4x - 2 = 0 \iff x = 1/2$$

$$\underset{(1')}{\Rightarrow} y = 2 - 2x = 1.$$

En kritisk punkt $(\frac{1}{2}, 1)$.

$$\boxed{f(\tfrac{1}{2}, 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

2) Parametriserar randen:



a) Kritiska punkter längs randkurvor:

$\underline{C_1}$: par. av $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle$, $0<t<2$

$$g_1(t) = f(\mathbf{r}_1(t)) = 0 \Rightarrow g_1'(t) = 0$$

$\Rightarrow$ alla $0<t<2$ krit. punkter.

$$\boxed{f(t,0) = 0 \quad 0<t<2}$$

$\underline{C_2}$: par. av $\mathbf{r}_2(t) = \langle 0, t\rangle$, $0<t<2$.

$$g_2(t) = f(\mathbf{r}_2(t)) = 0 \Rightarrow g_2'(t) = 0$$

$\Rightarrow$ alla $0<t<2$ krit. punkter.

$$\boxed{f(0,t) = 0 \quad 0<t<2}$$

$\underline{C_3}$: par. av $\mathbf{r}_3(t) = \langle 2, t\rangle$, $0<t<2$

$$g_3(t) = f(\mathbf{r}_3(t)) = -2t^3$$

$$g_3'(t) = -6t^2 \neq 0 \text{ om } 0<t<2$$

C_4: par. av $\mathbf{r}_4(t) = \langle t, 2 \rangle$, $0 < t < 2$.

$$g_4(t) = f(\mathbf{r}_4(t)) = -4t^2$$

$$g_4'(t) = -8t \neq 0 \text{ om } 0 < t < 2.$$

b) "Hörn", dvs. ändpunkter till randkurvorna:

$$\boxed{f(0,0) = 0}$$

$$\boxed{f(2,0) = 0}$$

$$\boxed{f(0,2) = 0}$$

$$\boxed{f(2,2) = -16}$$

Svar: f har globalt max $\frac{1}{4}$ i $(\frac{1}{2}, 1)$ och globalt min -16 i $(2,2)$.

4. Låt
$$h(s,t) = f(1+\sin(s-t), \arctan(s)),$$
där $f(u,v)$ är en deriverbar funktion så att
$$f(0,0)=9,\ f_u(0,0)=8,\ f_v(0,0)=7$$
och
$$f(1,0)=6,\ f_u(1,0)=5,\ f_v(1,0)=4.$$
Beräkna $h_s(0,0)$ och $h_t(0,0)$.

Låt $x(s,t) = 1 + \sin(s-t)$ och

$y(s,t) = \arctan(s)$

s.a. $h(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$

Enligt kedjeregeln är då:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

och motsv. om deriverar m.a.p. t istället för s.

$x(0,0) = 1, \quad y(0,0) = 0$

$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos(s-t), \quad \frac{\partial x}{\partial s}(0,0) = \cos(0) = 1$

$\frac{\partial x}{\partial t} = -\cos(s-t) \quad \frac{\partial x}{\partial t}(0,0) = -1$

$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{1+s^2} \quad \frac{\partial y}{\partial s}(0,0) = 1$

$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0,0) = 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = -5$$

Svar: $h_s(0,0) = 9$

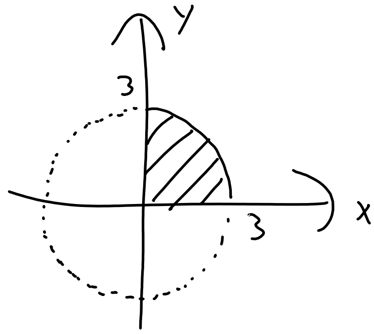
$h_t(0,0) = -5$

5. Beräkna

$$\iint_D xy^2\,dA,$$

där D är området i första kvadranten innanför cirkeln med centrum i origo och radie 3.

D:



D ges i polära koordinater av:

$0 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$

Enligt formeln för integration i polära koordinater, $dA = r\,dr\,d\theta$, blir:

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \underbrace{r\cos\theta}_{x}\,\underbrace{r^2\sin^2\theta}_{y^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\int_0^3 r^4\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3 d\theta = \left\{\begin{array}{l} t=\sin\theta \\ dt=\cos\theta\,d\theta \\ \theta=0 \Rightarrow t=0 \\ \theta=\pi/2 \Rightarrow t=1 \end{array}\right\} = \frac{3^5}{5}\int_0^1 t^2\,dt = \frac{3^4}{5}\left[t^3\right]_0^1 = \frac{3^4}{5}.$$

Svar: $\dfrac{3^4}{5} = \dfrac{81}{5}$

6. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_E 2z\,dV,$$

där $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{9-y^2}, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{y}\}$.

Enligt formeln för upprepad integration:

$$\iiint_E 2\,dV = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{y}} 2z\,dz\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \left[z^2\right]_0^{\sqrt{y}} dx\,dy =$$

$$= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y\,dx\,dy = \int_0^3 y\sqrt{9-y^2}\,dy = \left\{ \begin{array}{l} t = 9-y^2 \\ dt = -2y\,dy \\ y=0 \Rightarrow t=9 \\ y=3 \Rightarrow t=0 \end{array} \right\} = -\int_9^0 \sqrt{t}\,\frac{dt}{2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{t^{3/2}}{3/\cancel{2}}\right]_9^0 = \frac{9^{3/2}}{3}$$

<u>Svar:</u> $\dfrac{9^{3/2}}{3} = 9.$

7. Förklara varför arbetet som vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left\langle \frac{2x}{1+x^2+y^2}, 10y + \frac{2y}{1+x^2+y^2} \right\rangle$$

utför på en partikel som rör sig från en punkt till en annan bara beror på start- och slutpunkten (och alltså inte på exakt vilken kurva partikeln rör sig längs mellan punkterna). Beräkna arbetet som $\mathbf{F}$ utför på en partikel som rör sig från $A = (1,0)$ till $B = (1,1)$.

Om partikeln rör sig längs kurva C, parametriserad av $\mathbb{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, så är arbetet

$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}.$$

Om $\mathbb{F}$ är konservativt, dvs $\mathbb{F} = \nabla f$ för någon funktion f

så är enligt huvudsatsen för kurvintegraler:

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = f(\mathbb{r}(b)) - f(\mathbb{r}(a))$$

som alltså bara beror på startpunkten $A = \mathbb{r}(a)$ och slutpunkten $B = \mathbb{r}(b)$.

Kollar därför om $\mathbb{F}$ konservativt:

$\mathbb{F} = \langle P, Q \rangle$ def. på $\mathbb{R}^2$, som är enkelt sammanhängande, är konservativt precis om $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} \cdot (-1) \cdot 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \cdot (-1) \cdot 2x$$

lika $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ konservativt.

Hittar potential till $\mathbb{F}$. Vill lösa:

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} & (i) \\ f_y = 10y + \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} & (ii) \end{cases}$$

En lösning till (i) är $f_0 = \ln(1+x^2+y^2)$

(Kan antingen se detta direkt eller genom var. subst.:
$\int \frac{2x}{1+x^2+y^2}dx = \left\{ \begin{matrix} t = 1+x^2+y^2 \\ dt = 2x \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|1+x^2+y^2| = \ln(1+x^2+y^2)$)

så allmänna lösn. till (i) är

$$f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) = \ln(1+x^2+y^2) + g(y) \quad (*)$$

Sätter in detta i (ii)

$$10y + \frac{2y}{1+x^2+y^2} \underset{(ii)}{=} f_x \underset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(1+x^2+y^2) + g(y)\right) = \frac{2y}{1+x^2+y^2} + g'(y)$$

$$\Rightarrow \quad g'(y) = 10y \Rightarrow g(y) = 5y^2 + C$$

En potential till $\mathbb{F}$ är då $f = f_0 + g = \ln(1+x^2+y^2) + 5y^2$.

Enligt ovan blir då arbetet

$$W = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = f(1,1) - f(1,0) =$$

$$= \ln(3) + 5 - \ln 2 = \ln(3/2) + 5$$

<u>Svar:</u> Arbetet är $\ln(3/2) + 5$.

8. Beräkna arean av ytan som parametriseras av $\mathbf{r}(u,v) = \langle 2\cos u, 2\sin u, v\rangle$, där

$$(u,v) \in D = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2 - \cos^2(u)\}.$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 2\cos u, 2\sin u, 0\rangle$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = 2\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = 2$$

Arean blir då

$$\iint_S dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2-\cos^2 u} 2\, dv\, du = 2\int_0^{2\pi} 2 - \underbrace{\cos^2 u}_{= \frac{1+\cos(2u)}{2} \text{ (formelblad)}}\, du =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - \frac{\cos(2u)}{2}\, du = \Big[3 + \sin(2u)\Big]_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Svar: 6π.