Baskunskapstentamen 1 i Algebra för DAI1, DEI1, EI1, MEI1 och MI1 den 2006-09-18.
Tid: 8.15 - 10.15. Hjälpmedel: Inga!

1.a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + 2y = b \end{cases}$$

med avseende på x och y. (1,5p)

(Använd eliminationsmetoden på matrisform och ange lösningarna för alla värden på parametrarna a och b.)

b) Bestäm rangen av matrisen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & p & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ för alla värden på parametern p. (1p)

2.a) Definiera begreppet kommuterande matriser. (0,5p)

b) Bestäm talet c så att $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ kommuterar. (1p)

c) Bevisa att om matrisen **A** är inverterbar, så är inversen entydig. (2p)

d) Beräkna $(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^{\mathbf{T}})^{-1}$ då $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.

Använd Jacobis metod för matrisinverteringen. (1p)

3. Matrisekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{C} + 3\mathbf{BX} + \mathbf{X}$ är given.
Man vet att **A** är inverterbar, att **B** har fyra kolonner och att **C** har sex kolonner.

a) Lös ut **X** ur matrisekvationen. (Du får anta att de inverser som behövs existerar.) (1p)

b) Bestäm $typ\mathbf{X}$. (1p)

SVAR: 1.a) Fall1. $a \neq \frac{1}{2}$. $\begin{cases} x = -\frac{b-2}{2a-1} \\ y = \frac{ab-1}{2a-1} \end{cases}$ Fall2a. $a = \frac{1}{2}; b \neq 2$. Ingen lösning!

Fall2b. $a = \frac{1}{2}; b = 2$. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \end{cases}$ **b)** $\operatorname{rang}\mathbf{M} = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad p = 2 \\ 2 & \text{om} \quad p \neq 2 \end{cases}$

2.a) Teori **b)** $c = 3$ **c)** Teori **d)** $(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}^{\mathbf{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

3.a) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 3\mathbf{B} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{C}$ **b)** $typ\mathbf{X} = 4 \times 6$