Lösningar till Tentamen i Introkursen till LMA018, 30/8 2008, 8.30-12.30

1. Är följande en utsaga? Om det är en utsaga, är den sann eller falsk? (endast svar)
a) $\frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{2(x+1)}$
b) $(x = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1 = 1)$

Lösning: a) Ingen utsaga. Implikationspil får bara användas mellan två utsagor, och $\frac{x}{x+1}$ är ingen utsaga. Tänk på att en utsaga ska "påstå" någonting!
b) Sann utsaga. $x = 0$ och $x + 1 = 1$ är antingen båda sanna eller båda falska. Obs att $x = 0$ och $x + 1 = 1$ är båda öppna utsagor, men $(x = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1 = 1)$ som helhet är inte öppen.

2. Förenkla bråket $\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$.

Lösning:

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{6}{1}\right) = -\frac{18}{2} = -9$$

3. Bevisa att $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Lösning: Multiplicera ihop parenteserna: HL $= (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 =$ VL.

4. Skriv med heltalsnämnare: $\frac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Lösning: $\sqrt[4]{36} = 36^{1/4} = (6^2)^{1/4} = 6^{1/2} = \sqrt{6}$.

$$\frac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{2-3} = -(\sqrt{3\cdot 4} - \sqrt{2\cdot 9}) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{9} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}.$$

5. Utför polynomdivisionen $\frac{4x^3+3x^2-x+2}{x^2+3}$ och ange kvot och rest.

Lösning:

$$\begin{array}{r|l} & \;4x+3 \\ \hline x^2+3 & 4x^3+3x^2-x+2 \\ & \underline{-(4x^3+12x)} \\ & 3x^2-13x+2 \\ & \underline{-(3x^2+9)} \\ & \;-13+11 \end{array}$$

Kvoten är alltså $4x + 3$ och resten $-13x + 11$.

6. Förenkla $(a^2b)^3b^{-2}$ och ange vilka potenslagar du använder.

Lösning: Vi använder i tur och ordning lagarna $(ab)^n = a^nb^n$, $(a^n)^m$ och $a^na^m = a^{n+m}$:

$$(a^2b)^3b^{-2} = (a^2)^3b^3b^{-2} = a^6b^3b^{-2} = a^6b^1.$$

7. Vad har cirkeln på bilden för ekvation? (endast svar)

Lösning: Cirkeln på bilden i tentatesen har medelpunkt i $(2, 3)$ och radie 2, alltså är ekvationen $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

8. Definiera vad som menas med ett polynom av grad n.

Lösning: Ett polynom av grad n är ett uttryck av typen $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1x + a_0$, där n är ett heltal som inte är negativt, och $a_n, \ldots, a_0$ är reella tal.

9. Lös ekvationen $x^2 + 2x + 3 = 0$ med hjälp av kvadratkomplettering.

Lösning: Kvadratkomplettering ger $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 - 1 + 3 = (x + 1)^2 + 2$. Vi vill alltså lösa $(x + 1)^2 + 2 = 0$, vilket är ekvivalent med $(x + 1)^2 = -2$. Men -2 har inga reella rötter, alltså har ekvationen inga reella lösningar.

10. Lös ekvationen $\sqrt{x + 3} - 1 = x$.

Vi har:

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+3} = x + 1 \quad \Rightarrow$$
$$x + 3 = (x + 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 = x^2 + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$

Andragradsekvationen har lösningarna $x = 1$ och $x = -2$. Vi testar dessa i den ursprungliga ekvationen: om $x = 1$ är VL $= \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1 =$ HL, så $x = 1$ är en lösning. Om $x = -2$ är VL $= \sqrt{1} - 1 = 0 \neq -2 =$ HL, så $x = -2$ är inte en lösning.

11. Beräkna summan $\sum_{k=0}^{4}(k^2 + 1)$.

Lösning: $\sum_{k=0}^{3}(k^2 + 1) = (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

12. Faktoruppdela $3a^4b - 12a^2b^3$ så långt det går.

Lösning: $3a^4b - 12a^2b^3 = 3a^2b(a^2 - 4b^2) = 3a^2b(a - 2b)(a + 2b)$.

13. Ange den minsta gemensamma nämnaren till

$$\frac{x - 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2} - \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}.$$

Lösning: En gissning ger att $x = 1$ är en rot till $x^3 - x^2 + 2x - 2$, och faktorsatsen tillsammans med polynomdivision ger då att $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2)$. Istället för polynomdivision kan man också se det genom: $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + cx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Då ser man att vi måste ha $a = 1$ och $c = 2$, och dessutom är $b - a = -1$. Eftersom $a = 1$ måste då $b = -1 + 1 = 0$.

Vi kan inte faktorisera $(x^2 + 2)$ längre, eftersom $x^2 = -2$ inte har några reella lösningar. Men $x^2 + 2x - 3$ har rötterna $x = 1$ och $x = -3$. För att sammanfatta:

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2) \quad \text{och} \quad x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$

Den MGN är då $(x-1)(x^2+2)(x+3)$.

14. Lös ekvationen $|x - 1| = x + 1$.

Lösning: Brytpunkten för $|x-1|$ är 1. Om $x \geq 1$ kan ekvationen skrivas $x - 1 = x + 1$, dvs $-1 = 1$, som saknar lösning. Om $x \leq 1$ kan ekvationen skrivas $-(x-1) = x + 1$ som är ekvivalent med $2x = 0$, som har lösningen $x = 0$. Eftersom $0 \leq 1$ så är lösningen $x = 0$.

15. Lös olikheten $\frac{2x-3}{x+1} \geq 1$.

Lösning: Vi har:

$$\frac{2x-3}{x+1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x+1} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x-3)-(x+1)}{x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{x+1} \geq 0$$

Nu gör man en teckentabell, eller tänker så här: Om bråket ska vara ≥ 0, måste antingen både täljaren och nämnaren vara positiva, eller båda negativa. Båda är positiva om $x > 4$ och $x > -1$, dvs $x > 4$. Båda är negativa om $x < 4$ och $x < -1$, dvs $x < -1$. Det är också okej om $x = 4$, för då blir bråket noll. Alltså: lösningen är $x < -1$ eller $x \geq 4$.

16. Beräkna $\tan \frac{5\pi}{3}$ exakt.

Lösning: $5\pi/3 = -\pi/3 + 2\pi$, så

$$\tan \frac{5\pi}{3} = \tan \frac{-\pi}{3} = \frac{\sin(-\pi/3)}{\cos(-\pi/3)} = -\frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$$

17. Lös ekvationen $\sin(2v + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösning: $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$, så i det ena fallet är

$$2v + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad 2v = \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad 2v = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{24} + \pi n.$$

och i det andra fallet är

$$2v + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad 2v = \frac{12\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad 2v = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \frac{5\pi}{24} + \pi n.$$