

Lösningar till problemtentamen i Algebra för DAI1 m fl den 2008-10-24.**Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd (typgodkänd) räknedosa.

1.a) Bestäm det reella talet r så att $\operatorname{Re}\left(\frac{5+jr}{1+j3}\right) = 0$. (1p)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{5+jr}{1+j3}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{(5+jr)(1-j3)}{(1+j3)(1-j3)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{5-j15+jr-j^23r}{1-j^23^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{3r+5+j(r-15)}{1+9}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{3r+5}{10} + j\frac{r-15}{10}\right) = \frac{3r+5}{10} \quad \text{varav} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{5+jr}{1+j3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3r+5=0 \Leftrightarrow r = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

b) Skriv det komplexa talet $-\sqrt{3}-j$ på polär form. (1,5p)

$$z_1 = x_1 + jy_1 = -\sqrt{3} - j = r_1 e^{j\theta_1} \quad \text{där}$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta_1 = (x_1 < 0) = \pi + \arctan \frac{y_1}{x_1} = \pi + \arctan \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \pi + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$z_1 = -\sqrt{3} - j = 2e^{j\frac{7\pi}{6}}$$

c) Förenkla $z = \frac{(-\sqrt{3}-j)^{200}}{(1-j)^{402}}$ (2,5p)

II $z_2 = x_2 + jy_2 = 1-j = r_2 e^{j\theta_2}$ där

$$\begin{cases} r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \\ \theta_2 = (x_2 > 0) = \arctan \frac{y_2}{x_2} = \arctan \frac{-1}{1} = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$z_2 = 1-j = 2^{\frac{1}{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Exponentiallagarna för $e^{j\theta}$ ger nu att

$$\begin{aligned}z &= \frac{(z_1)^{200}}{(z_2)^{402}} = \frac{(2e^{j\frac{7\pi}{6}})^{200}}{(2^{\frac{1}{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}})^{402}} = \frac{2^{200}e^{j\frac{7\pi}{6}\cdot 200}}{2^{\frac{1}{2}\cdot 402}e^{-j\frac{\pi}{4}\cdot 402}} = \frac{2^{200}e^{j\frac{700\pi}{3}}}{2^{201}e^{-j\frac{201\pi}{2}}} = 2^{201-201}e^{j(\frac{700\pi}{3}-(-\frac{201\pi}{2}))} = \\ &= 2^{-1}e^{j(233\pi+\frac{\pi}{3}+100\pi+\frac{\pi}{2}))} = \frac{1}{2}e^{j(334\pi-\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}))} = \frac{1}{2}e^{j(167\cdot 2\pi-\frac{\pi}{6}))} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + j\sin(-\frac{\pi}{6})) = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{6} - j\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4}\end{aligned}$$

d) Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $2z^3 - 5z^2 + az + b = 0$ har roten $1 + j3$ och lös ekvationen.

(3p)

Sätt $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + az + b$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 1 + j3 \text{ rot till } P(z) = 0 \\ P(z) \text{ har reella koefficienter} \end{array} \right\} \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = 1 - j3 \text{ rot till } P(z) = 0$$

Enligt satsen om faktorruppdelning kan $P(z)$ skrivas

$$P(z) = a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 2(z - (1 + j3))(z - (1 - j3))(z - c)$$

$P(z)$ har alltså faktorn

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - 1 - j3)(z - 1 + j3) = (z - 1)^2 - (j3)^2 = z^2 - 2z + 10$$

varför vi kan ansätta

$$\begin{aligned} P(z) &= 2z^3 - 5z^2 + az + b = 2(z^2 - 2z + 10)(z - c) = \\ &= 2(z^3 - cz^2 - 2z^2 + 2cz + 10z - 10c) = 2z^3 + (-2c - 4)z^2 + (4c + 20)z - 20c \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{aligned} z^3: \quad 2 &= 2 \\ z^2: \quad -2c - 4 &= -5 \Rightarrow -2c = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \\ z^1: \quad 4c + 20 &= a \Rightarrow a = 4c + 20 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 20 = 22 \\ z^0: \quad -20c &= b \Rightarrow b = -20c = -20 \cdot \frac{1}{2} = -10 \end{aligned}$$

Det följer att $z_3 = c = \frac{1}{2}$

SVAR: $(z_{1,2} = 1 \pm j3) \wedge (z_3 = \frac{1}{2}), a = 22, b = -10$

Alternativ lösning.

$$P(1 + j3) = 2(1 + j3)^3 - 5(1 + j3)^2 + a(1 + j3) + b = a + b - 12 + j(3a - 66) = 0 + j0$$

ger att

$$3a - 66 = 0 \Leftrightarrow a = 22 \quad \text{osv.}$$

2. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + ay - 4z = 2 \\ x + y - az = 1 \\ 3x + 5y + z = 6 \end{cases}$$
 och låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a & -4 \\ 1 & 1 & -a \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dvs } \mathbf{A} \text{ är koefficientmatrisen till ES.}$$

a) Visa att $\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (a = 1) \vee (a = 2)$. (1p)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & a & -4 \\ 1 & 1 & -a \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1 + 5a) - a(1 + 3a) - 4(5 - 3) = 2 + 10a - a - 3a^2 - 20 + 12 = -3(a^2 - 3a + 2)$$

$$\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow (a = 2) \vee (a = 1)$$

b) Beräkna y för $a = 0$. Använd Cramers regel. (1p)

$$a = 0 \Rightarrow \det \mathbf{A} = -3(a^2 - 3a + 2) = -3(0^2 - 3 \cdot 0 + 2) = -6$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1 - 0) - 2(1 - 0) - 4(6 - 3) = 2 - 2 - 12 = -12 \quad \text{varav} \quad y = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-12}{-6} = 2$$

c) Undersök med hjälp av **inversens definition** för vilket värde på a som matrisen

$$\mathbf{X} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 20 & -4 \\ 1 & -14 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \text{ är en invers till } \mathbf{A}. \quad (1p)$$

$$\mathbf{XA} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 20 & -4 \\ 1 & -14 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & a & -4 \\ 1 & 1 & -a \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -a & -20a \\ 0 & a+6 & 14a \\ 0 & -2a & 6-10a \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ger bl a att $-a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

d) Lös ES för alla värden på parametern a för vilka detta är möjligt.
Använd eliminationsmetoden på matrisform.

(4p)

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & a & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -a & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2} & \boxed{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a & 1 \\ 0 & a-2 & 2a-4 & 0 \\ 0 & 2 & 3a+1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \neq 2 \\ \boxed{\frac{1}{a-2}} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3a+1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{-1} & \boxed{-2} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a-3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \neq 1 \\ \boxed{\frac{1}{3a-3}} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \boxed{-2} & \boxed{a+2} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{a+2}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \end{bmatrix}$$

Fall 1: $a \neq 1, a \neq 2$
(Precis en lösning.)

Fall 2: $a = 1$
(ES saknar lösning!)

$$\begin{cases} x = \frac{2a+1}{a-1} \\ y = -\frac{2}{a-1} \\ z = \frac{1}{a-1} \end{cases}$$

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x-3z = 1 \\ y+2z = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Fall 3: $a = 2$
(z fri variabel. ES har oändligt många lösningar!)

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \boxed{\frac{1}{2}} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{-1} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\begin{cases} x - \frac{11}{2}z = -\frac{1}{2} \\ y + \frac{7}{2}z = \frac{3}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 11t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2t \end{cases}$$

e) För $a = 1$ har ES, som framgår av **2d**, ingen exakt lösning.

Bestäm för $a = 1$ den bästa möjliga lösningen i minsta kvadrarmetodens mening.
Medelfelet behöver inte beräknas.

(3p)

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 3x + 5y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls av (ESU) $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 18 & -6 \\ 18 & 27 & 0 \\ -6 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \det \mathbf{A}^T \cdot \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \text{ existerar ej!}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 33 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(\text{ESU}) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 14 & 18 & -6 \\ 18 & 27 & 0 \\ -6 & 0 & 18 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 23 \\ 33 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} | \mathbf{A}^T \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 14 & 18 & -6 & 23 \\ 18 & 27 & 0 & 33 \\ -6 & 0 & 18 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{9}} \\ \boxed{-\frac{1}{6}} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 14 & 18 & -6 & 23 \\ 2 & 3 & 0 & \frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 0 & \frac{11}{3} \\ 14 & 18 & -6 & 23 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-2} \quad \boxed{-14} \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{8}{3} \\ 0 & 18 & 36 & 16 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{3}} \\ \boxed{\frac{1}{18}} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x - 3z = \frac{1}{2} \\ y + 2z = \frac{8}{9} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 3s \\ y = \frac{8}{9} - 2s \\ z = s \end{cases}$$

3. I ett ONH-system är punkterna $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 1)$ och $C = (a; 2; 3)$ givna.

a) Beräkna vinkeln mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ för $a = 0$. (1p)

b) För vilket/vilka värden på konstanten a blir vinkeln 60° mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$? (2,5p)

Skalärprodukten definition ger att $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta$, där

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a-1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (a-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = a+1$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 9}$$

$$\text{varav } a+1 = \sqrt{2} \sqrt{a^2 - 2a + 9} \cos \theta.$$

$$\text{a) } a = 0 \Rightarrow 1 = \sqrt{2} \sqrt{9} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{b) } \theta = 60^\circ \Rightarrow a+1 = \sqrt{2} \sqrt{a^2 - 2a + 9} \cos 60^\circ \Leftrightarrow a+1 = \sqrt{2} \sqrt{a^2 - 2a + 9} \cdot \frac{1}{2}$$

Kvadrering av båda leden ger att

$$a^2 + 2a + 1 = 2(a^2 - 2a + 9) \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2a^2 + 4a + 2 = a^2 - 2a + 9 \Leftrightarrow a^2 + 6a - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{1,2} = -3 \pm 4 \Leftrightarrow (a=1) \wedge (a=-7). \text{ Eftersom vi har kvadrerat måste rötterna prövas.}$$

$$a = 1 \Rightarrow VL = a+1 = 2; HL = \sqrt{2} \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 9} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{16} \cdot \frac{1}{2} = 2 = VL \quad \text{OK!}$$

$$a = -7 \Rightarrow VL = a+1 = -6; HL = \sqrt{2} \sqrt{(-7)^2 - 2 \cdot (-7) + 9} \cdot \frac{1}{2} = 6 \neq VL \quad \text{Falsk rot!}$$

Anm. Man kan direkt se att $a+1 = \sqrt{2} \sqrt{a^2 - 2a + 9} \cos 60^\circ \geq 0 \Rightarrow a \geq -1$.

$$\text{c) Visa att } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-a \end{bmatrix} \quad (1p)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a-1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ a-1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left(\mathbf{e}_x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \mathbf{e}_x (2-0) - \mathbf{e}_y (2-0) + \mathbf{e}_z (2-(a-1)) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-a \end{bmatrix}$$

d) Låt Π vara det plan som går genom punkterna A, B och C.

För vilket/vilka värden på konstanten a ligger punkten $D = (1; 2; 5)$ i planet Π ? (2p)

Planets normalvektor är parallell med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Välj t ex $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{r}_o = \overrightarrow{OA}$.

Planets ekvation blir då

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) - 2(y-0) + (3-a)(z-1) = 0$$

Planets ekvation är $\Pi: 2x - 2y + (3-a)z + a - 5 = 0$.

Insättning av koordinaterna för punkten $D = (1; 2; 5)$ i planet Π 's ekvation ger:

$$2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + (3-a) \cdot 5 + a - 5 = 0 \Leftrightarrow -4a = -8 \Leftrightarrow a = 2$$

SVAR: $a = 2$

e) För vilka värden på a bildar $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ett högersystem? (0,5p)

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + (3-a) \cdot 4 = -4a + 8 > 0 \Leftrightarrow a < 2$$

f) Låt L_1 vara den linje som går genom punkterna A och B.

För vilka värden på konstanten a blir avståndet 6 le mellan L_1 och punkten C? (2p)

Vi har att $d = \frac{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o)|}{|\mathbf{v}|}$ där t ex

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} a-1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-a \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$d = \frac{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o)|}{|\mathbf{v}|} \Leftrightarrow 6 = \frac{\sqrt{(a-3)^2 + 8}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 6\sqrt{2} = \sqrt{(a-3)^2 + 8}$$

och kvadrering av båda leden ger att

$$36 \cdot 2 = (a-3)^2 + 8 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 64 \Leftrightarrow a-3 = \pm 8 \Leftrightarrow (a=11) \vee (a=-5)$$

Prövning: $HL = \sqrt{(a-3)^2 + 8} = \sqrt{(3 \pm 8 - 3)^2 + 8} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2} = VL$